5.3 究極の連分数

黄金比が

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

の解であることは述べたね。しかし、違った考えで x の解を求めることもできる。

ややこしい話だけれど、$x = 1 + \dfrac{1}{x}$ の $1 + \dfrac{1}{x}$ を右辺の x に代入してみることだ。つまり

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

ということだ。しかし、右辺にはまだ x が存在するので、再び $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ を右辺にの x に代入すると

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

となるだろう。さらに、右辺にはまだ x が存在するので...。きりがないね。だが、これを無限に続ければ

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}$$

となることが理解できるだろうか。

このように、分数の中に分数が幾重にもなる分数を**連分数**と呼んでいる。連分数は一般に

$$a = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \cdots}}}$$

で表すが、これでは紙面を使い過ぎるので

$$a = [q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ \ldots]$$

といった表し方をすることが多い。連分数の各分子が常に 1 だから可能な記述なのだ。

ところで、連分数で表された x は $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ の解だから $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ だ。つまり

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots]$$

なんだね。右辺の連分数には 1 しか使われていないので、連分数の中でも特別な連分数だ。

そもそも連分数が特別なんだから、黄金比はまさに究極の連分数と言えるだろう。でも、ちょっと待って。連分数って本当に特別な分数なの？　次の例を見てほしい。

$$\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$$

有限個の分数で終わっているけれど、これも正真正銘の連分数だ。例が正しいことをぜひ確認してほしい。

実はどんな分数も連分数で表せる。いや、無理数だって連分数になるのだ。この道中では深入りはしないが、有理数は有限連分数、無理数は無限連分数ということが知られている。ちょっと前に這っていた場所で、割り切れない分数は循環小数—つまりは規則的な繰り返しをする数—であることを確認したはずだ。それに対して無理数は、不規則な小数だっただろう。でも驚いてはいけない。不規則なのは見せ掛けなのだ。

計算は少々面倒だが、[1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...] や [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...] といった、規則的な連分数がどんな小数になるか計算してみるとよい。もちろん "..." の部分すべては計算できないので、"..." の直前で終わっている連分数として計算するわけだけど。

おそらくどこかで目にした近似値になったのではないだろうか。もし、"..." をすべて計算できれば、まさにその数になる。何とも不思議なものだが、詳しくは別の機会に回そう。ここでは、有理数を有限連分数に直すマクロに取り組むことにする。

```
\newcommand\contfrac[2]{%
  \newcount\a \newcount\b \newcount\r
  \a=#1 \b=#2 \r=1
  \loop \ifnum\r>0
    \r=\a \divide\a\b \number\a\
    \multiply\a\b \advance\r-\a
    \a=\b \b=\r
  \repeat
}
```

これで、『$\frac{355}{113}$ の連分数表示は`\contfrac{355}{113}`である。』と書けば『$\frac{355}{113}$ の連分数表示は 3 7 16 である。』が出力される。見た目は明らかに連分数ではないが、連分数展開の分母が表示されたのである。

マクロを説明する前に、$\frac{355}{113}$ を連分数にする方法を知る必要がある。コンピュータは自ら連分数を作ってくれないのだ。あくまでも人がやる作業と同じことを、短時間でやってのけるだけなのだから。

それは次のようにして求められた。

$$\begin{aligned}\frac{355}{113} &= 3+\frac{16}{113}\\ &= 3+\frac{1}{\frac{113}{16}}\\ &= 3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}\end{aligned}$$

いちいち説明の必要はないだろう。$\frac{a}{b}\to\frac{1}{\frac{b}{a}}$ を使ってるだけだしね。ここでは最後に $\frac{1}{16}$ が現れて終了となったが、仮に $\frac{3}{16}$ にでもなろうものなら、さらに $\frac{3}{16}=\frac{1}{\frac{16}{3}}$ としていけばよい。最終的に分子が 1 になったところで終了だ。マクロは分子が 1 であることの確認を、分数の逆数が割り切れるかどうかでしているけれど、意味するところは変わらない。

このマクロは分子・分母の値を必要とする。ここでは分子を`\a`、分母を`\b` とし、それぞれを引数としてマクロに与えている。また、分子を分母で割った余りが`\r` である。

はじめに`\r=1` としているが、初期値は正の値なら何でもよい。要するに余りが 0 でなければ処理が続くのである。マクロはいきなり`\a` の値を`\r` に与えている。実は、`\r` は余りを格納するだけでなく、`\a` の退避用としても使っている。ここでは`\a` を退避させる目的で利用した。それは余りを計算するために、もとの`\a` の値が欲しいからだ。実際、`\a` を`\b` で割ったあとで、今度は余りの値を格納するために`\advance\r-\a` としているのだ。

それから、分子と分母を交換するために`\b` を`\a` に、`\r` を`\b` に代入している。え？余りは分子である a に代入するんじゃないの？　そう、たしかにそうだが、さらに次の連分数展開ではこの逆数が使われるので、余りは分母にされてしまうはずだ。だから分母である`\b` に代入したのだ。したがって、いままで分母に使われていた`\b` が新しい分子`\a` になる。不思議な代入かもしれないが、これで分子・分母の入れ換えが完了する。人が行う作業が凝集されていることを見逃してはいけない。

このとき連分数展開に現れる次の数は $\frac{a}{b}$ の整数部分である。だから`\number\a` によって、その都度、計算結果を出力することになる。

いろいろな分数の連分数表記を調べると意外な発見があるだろう。このマクロは無理数を連分数にできないが、たとえば黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ なら近似分数として $\frac{16180339}{10000000}$ を使ってもよい。試しに、この近似分数でマクロ『`\contfrac{16180339}{10000000}`』を処理すると次のようになる。

『1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3 1 10 15 1 1 1 2 』

さすがに後ろの方になると誤差が出るので、ずーっと 1 が出力されるわけではない。それで

も、だいたいの雰囲気はつかめるはずだ。ちなみに『`\contfrac{141421356}{100000000}`』や『`\contfrac{17320508}{10000000}`』なども試してみるとよいだろう。言わずとも知れた $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ の近似分数で、それぞれ『1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 4 1 1 2 6 8 』や『1 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 9 1 3 2 3 』が出力される。末尾の数字の並びは近似分数の誤差によって変なことになるが、途中までの出力の様子を見れば $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ の連分数表記が類推できるはずだ。