5. . . の蝶道

5.1　黄金比

さあ、これから 5. . . の蝶道が始まる。と言っても 5 から始まるのではなく、這っている途中に 5 と出会うのが、いままでとは違うところだが。

まず、フィボナッチ数列の 2 項の比

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \cdots$$

に再び登場してもらおう。

以前出会ったことなので分かっているだろうが、比の値は $1.618033\cdots$ となる。ところでフィボナッチ数列の 2 項の比は、$\frac{(\text{後の項})}{(\text{前の項})}$ で求めたものだ。しかし、比なんだから別に $\frac{(\text{前の項})}{(\text{後の項})}$ で求めたっていいだろうに。そう思ったら、フィボナッチ数列の比を $\frac{(\text{前の項})}{(\text{後の項})}$ で計算してほしい。だいぶ以前に書いたマクロを変更すればすぐだが、TEX で実数値を計算させると精度が良くない。20 項目前後のフィボナッチ数を用いて、電卓で計算してみるとよい。

さあ、比の値はどうなった？　ちょっと面白い結果になったのではないかい？　比の値は $0.618033\cdots$ である。きっちり 1 だけ違っているだろう。誤差はないのかって？　そう、まったく誤差はないのだ。この面白い性質を持つ比の値は**黄金比**と呼ばれている。一般には、$1.618033\cdots$ の方を黄金比と呼ぶことが多い。

黄金比とは一体どういう数なのだろうか。計算は簡単にできるので確かめてみよう。

まず、$1.618033\cdots$ に収束する真の値を x としよう。あとから求めた比 $0.618033\cdots$ は、x の逆比 $\frac{1}{x}$ のことである。それが x より 1 小さい値に等しいのだから

$$\frac{1}{x} = x - 1$$

が成り立つ。等式は簡単な 2 次方程式となる。両辺に x を掛けて整理すると $x^2 - x - 1 = 0$ だから、解の公式を使えば一発で解ける。フィボナッチ数の比は正の値なので、$x > 0$ の解を求めると

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

であることが分かる。黄金比は**無理数** $\sqrt{5}$ を含む数なのだ。ここに 5 が登場してきた。解は正の数だけに限っているものの、方程式からひとつの解しか得られないということは、この性質を満たす数は黄金比だけということである。

TEX でシミュレートしてみよう。ここでは $\dfrac{1}{x} = x - 1$ を移項して

$$x = \frac{1}{x} + 1 \tag{5.1}$$

で x を探ることにする。そのほうが x の値を直接計算できるからだ。ところで、探るという言葉が気になるね。なぜそのような言葉遣いをしたかはマクロを見てもらいたい。

```
\makeatletter
\newcommand\gratio[1]{%
  \newcount\c \newdimen\x
  \x=#1pt
  \loop
    \dimendiv(1, \strip@pt\x)%
    \advance\dimen@1pt
    \strip@pt\dimen@,
    \x=\dimen@
    \advance\c1
  \ifnum\c<12 \repeat
}\makeatother
```

これで、『計算値を羅列すると`\gratio{3}`となる。』と書けば『計算値を羅列すると 1.33339, 1.75014, 1.57144, 1.63646, 1.61115, 1.62077, 1.61716, 1.6185, 1.61801, 1.61815, 1.61818, 1.61815, となる。』が出力される。最後に “,” が出力されて見苦しいが、今回は見栄えはどうでもよかったので調整はしていない。

マクロにはとくに新しいことはない。実数値を割り算のために`\dimendiv` ルーティンを用いたので、`\makeatletter` を宣言した他は説明の必要はないだろう。いろいろ試してほしい。引数として与える値、すなわち初期値が何であれ黄金比に収束する様子が分かると思う。ただし、相変わらず`\dimendiv` のせいで、わずかに大きい値になって申し訳ない。

ここで使った変数`\c` は、久々に`\loop`〜`\repeat` で使われない、独立した単なるカウンタである。数える回数が、1 回ぐらい多くても少なくてもまったく問題ないので、初期値も代入せず、とりあえず 12 未満までカウントした。

さて、マクロを見て、あれ？コンピュータが 2 次方程式を解くんじゃないんだ、と感じただろう。そう、コンピュータは計算をする機械であって、問題を解く機械ではない。問題を解く手順は人間が与えるのだ。では、この手順は何をしているのだろう。どう見ても $\dfrac{1}{x} = x - 1$ と同等な—

つまり両辺に x を掛けた—方程式

$$1 = x^2 - x$$

を解いているのではないね。でも、解である黄金比が求められている。

それなら $1 = x^2 - x$ を移項した式、$x = x^2 - 1$ を使っても同じことだろう。マクロの計算式を $x = x^2 - 1$ に相当する式に変えてみよう。

```
\makeatletter
\newcommand\gratio[1]{%
  \newcount\c \newdimen\x
  \x=#1pt
  \loop
    \dimendiv(\strip@pt\x, \strip@pt\x)%
    \advance\dimen@-1pt
    \strip@pt\dimen@,
    \x=\dimen@
    \advance\c1
  \ifnum\c<12 \repeat
}\makeatother
```

さあ、準備は整った。マクロを走らせよう。今度は、与えるどんな値に対しても黄金比に収束する、とは言えないはずだ。`\gratioB{3}`ではオーバーフローを起こすだろうし、`\gratioB{1.5}`でもおかしな値を出力するはずだ。

どうして？　同じ関係の方程式を使ったはずなのに。その秘密はグラフを描けば見えてくる。はじめのマクロに使ったのは $x = \dfrac{1}{x} + 1$ で、次のマクロに使ったのは $x = x^2 - 1$ だから、それぞれ

$$y = x \quad と \quad y = \frac{1}{x} + 1$$
$$y = x \quad と \quad y = x^2 - 1$$

のグラフの交点を求めていることになる。ただし、マクロは一気に交点を求めているのではない。適当な x から始めて、いわば 2 つのグラフを渡り歩くような処理がマクロのしていることだ。どういうことか説明してみよう。

まず、初期値を $x = x_1$ としよう。$y = \dfrac{1}{x} + 1$ の場合でも $y = x^2 - 1$ の場合でも、$x = x_1$ を代入すると何らかの値 $y = y_1$ を得ることができる。すると今度は y_1 の値を x_2 として同じ $y = \cdots$ の式に代入してやると、また何らかの値 $y = y_2$ が得られる。そしてまた y_2 の値を x_3 として... という具合だ。

このことは、たとえば具体的に $x = 3$ から始めれば、$y = \dfrac{1}{x} + 1$ の場合と $y = x^2 - 1$ の場合では生成される値に差が出ることがすぐ分かる。では、$x = 1.5$ から始めるとどうだろう。$y = x^2 - 1$

は期待した値にならないはずだが、かと言って $x = 3$ ほどひどいことにはなりそうもない。違いはどこにあるのだろう。

　でも、これ以上詳しいことは言わないでおこう。実際にグラフを描いて、x 軸上の点から始めて、2 つのグラフを縦横縦横…交互に進んでみよう。$y = x$ と $y = \dfrac{1}{x} + 1$ のグラフでは、必ず交点にたどり着くだろう。しかし、$y = x$ と $y = x^2 - 1$ のグラフでは、始めの x 次第で交点にたどり着いたりあさっての方向へ跳んでしまったりするはずだ。こうなったときが、収束しない場合なのである。