

3.2 マチンの計略

円周率の値を計算するのに無限級数を用いた。ただ、そこで用いた級数は収束が遅いため計算機向きでなかった。計算機向きの級数に仕立て上げたのはマチン¹である。詳しい経過を述べることはできないが、マチンは

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{1 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots \right) - \left(\frac{1}{1 \cdot 239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots \right)$$

という式をひねり出した。ここでもまた $\frac{\pi}{4} = \cdots$ の形である。気になる人にだけ、そつと耳打ちしておこう。グレゴリーの式もマチンの式も $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ であること、すなわち $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$ であることが利用されているからだ。そして

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

である。以上。え？ なおさら気になる？ 知りたい人はきちんとした数学の書物を読んでみよう。

さて、いまはマチンの式を

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{239} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5^3} - \frac{1}{239^3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5^5} - \frac{1}{239^5} \right) - \cdots$$

と見て、 π の値を計算することにしよう。

```
\makeatletter
\newcommand\mpi[1]{%
  \newcount\n \newdimen\u \newdimen\v \newdimen\x \newdimen\p
  \u=20pt \v=239pt
  \loop \x=0pt
    \dimendiv(\strip@pt\u, 5)\dimendiv(\strip@pt\dimen@, 5)%
    \u=\dimen@ \advance\x\u
    \dimendiv(\strip@pt\v, 239)\dimendiv(\strip@pt\dimen@, 239)%
    \v=\dimen@ \advance\x-\v
    {\multiply\n2 \advance\n1 \dimendiv(\strip@pt\x, \n)%
     \global\x=\dimen@}%
    \advance\p\ifodd\n-\fi\x
    \advance\n1
  \ifnum\n<#1 \repeat
  \multiply\p4
  \strip@pt\p
}\makeatother
```

これで、『円周率の近似値は\mpi{3}である。』と書けば『円周率の近似値は3.14185である。』が出力される。びっくりだろう。たった3項分でこの精度だ。実は TeX の有効桁数では、もう\mpi{4}で頭打ちになってしまうのだけれど。

¹ジョン・マチン (1685–1751)：イギリスの天文学者。

マクロはやや妙はことをしているが、それでもわずかの項数計算でそこその値が出たことを素直に喜ぼう。毎度のことながら、`\dimendiv` の仕様のせいで若干多めの値になっている。

マチンの式は複雑であるが、実際は一種類の項を、繰り返し足したり引いたりしているだけである。基本となる第 n 項は

$$\frac{1}{2n-1} \left(\frac{4}{5^{2n-1}} - \frac{1}{239^{2n-1}} \right)$$

という式であり、これらを交互に足したり引いたりしている。ここの処理さえ上手にできれば、あとはいまだ道をたどるだけでよい。ところが、その処理が面倒であった。

というのは、次の項に進むにつれ 5^2 や 239^2 で割ればよいのだが、初項だけは 5 と 239 で割っている。それはそれで最初に処理すれば済むのだが、`TeX` のマクロではなるべく手間をかけたくない。そこで、いちばん始めの項を $\frac{1}{1} \left(\frac{4 \cdot 5}{5^2} - \frac{1 \cdot 239}{239^2} \right)$ と見ておけば、計算の始まりは $4 \cdot 5$ を 5^2 で、 $1 \cdot 239$ を 239^2 で割ったことになり、次の項からも一定して 5^2 と 239^2 を割り重ねればよい。それが初期値に与えた `\u=20`、`\v=239` なのである。おかげで、`\loop~\repeat` 内の割り算処理が一貫して行えるようになった。

繰り返しの処理は、 $\frac{4}{5^{2n-1}}$ の値を `\u`、 $\frac{1}{239^{2n-1}}$ の値を `\v` に対応させ、その差を `\x` に代入している。さらに `\x` は奇数 $1, 3, 5, \dots$ で割らなければならないので、グルーピングの中で処理をしている。もちろん `\n` の値が連動して変化しては困るからだ。グルーピング内で奇数値を得る計算は $2n+1$ であることに注意してもらいたい。その理由は、このマクロの `\n` が 0 から始まるからである。なぜ 1 から始めなかったかという、引数から得た `\n` は繰り返し回数の判定のために `\ifnum\n<\#1` に使われているからだ。本当は `\#1` より 1 大きい値を判定に用いた方が素直でよいが、`\#1` は変更できない。どうしてもというなら、`\#1` の値をたとえばカウンタ変数 `\c` に代入して変化させるしかない。その手間を嫌ったためにこうなっている。

このように書くと、かえって面倒なことをしている感じがするだろうか。でも、そうではないのだ。さっきの基本となる第 n 項は

$$\frac{1}{2n-1} \left(\frac{4}{5^{2n-1}} - \frac{1}{239^{2n-1}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

という式だったので、マクロを組むために

$$\frac{1}{2n+1} \left(\frac{4 \cdot 5}{5^{2n+1}} - \frac{1 \cdot 239}{239^{2n+1}} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と見直したに過ぎない。この 2 式がまったく同じ項を生成することは確認してもらいたい。上の式において、 n をあらためて $n+1$ に見直せば下の式になることが分かるはずだ。

さて、この変形のために $\backslash x$ を足したり引いたりする操作が、今度は n が奇数のときに引くことになった。よって、`\advance\p\backslash x`において $\backslash x$ の符号を変える処理が`\ifodd\backslash n-\backslash fi`なのである。この場合、 $\backslash n$ が偶数ならば何もしないので、`\else`以下は必要なくなった。なんと、さっきより一段と簡略化が進んだじゃないか。

このように、計算式をうまく変形してマクロを単純化することは大事なことなのだ。