3.2　マチンの計略

円周率の値を計算するのに無限級数を用いた。ただ、そこで用いた級数は収束が遅いため計算機向きでなかった。計算機向きの級数に仕立て上げたのはマチン[1)]である。詳しい経過を述べることはできないが、マチンは

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{1\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\cdots\right)-\left(\frac{1}{1\cdot 239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\cdots\right)\quad(※)$$

という式をひねり出した。ここでもまた $\dfrac{\pi}{4}=\ldots$ の形である。気になる人にだけ、そっと耳打ちしておこう。グレゴリーの式もマチンの式も $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ であること、すなわち $\dfrac{\pi}{4}=\arctan 1$ であることが利用されているからだ。そして

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\quad（☆）$$

である。以上。え？　なおさら気になる？　知りたい人はきちんとした数学の書物を読んでみよう。

さて、いまはマチンの式を

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{239}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5^3}-\frac{1}{239^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5^5}-\frac{1}{239^5}\right)-\cdots$$

と見て、π の値を計算することにしよう。そのための関数が『

```
\begin{luacode*}
function mpi(n)
    p = 0  sgn = 1
    for i = 1, n, 2 do
        p = p + sgn / i * ( 4 / 5^i - 1/239^i )
        sgn = -sgn
    end
    return 4 * p
end
\end{luacode*}
```

』である。これで『`\directlua{tex.ptinr(mpi(5))}`』と書けば、近似値『3.141621029325』が出力される。`n = 5` が 3 項分であることに注意すれば、この精度はびっくりだろう。LuaTEX の有効

1）ジョン・マチン（1685–1751）：イギリスの天文学者。

桁数では『\directlua{tex.print(mpi(17))}』としたところで『3.1415926535898』となって頭打ちとなる。

スクリプトがしていることは基本的に

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \quad (\bigstar)$$

と変わらないので説明の必要はないくらいだ。一言だけ付け加えるなら、スクリプトに使った式が（※）の項を入れ替えた式を使ったことである。この方がスクリプトが簡単に書けるからだ。

数学的には**無限級数**の項を勝手に入れ替えてよいかは状況による。項を入れ替えてよいのは**絶対収束**している場合であり、（※）はその条件に合う。ちなみに、絶対収束でなく単に収束する級数は**条件収束**と呼ぶが、この場合は項を入れ替えると収束する値が**任意の**値になる。どういうことか気になったら勉強しましょう。

（★）の級数を改めてマチンの式と比べると、級数の各項に $\left(\dfrac{4}{5^{2n-1}} - \dfrac{1}{239^{2n-1}}\right)$ を掛けてマチンの式ができあがったように見える。なんでそんなことになるのだろう。さっきは、きちんとした数学の書物を読んでみようと言ったが、簡単に理屈を述べてみよう。

マチンは、ほとんどの人が高校で習うであろう 2 倍角の公式を $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ に利用した。

まず、$\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$ となる角 α があるとする（実際にそのような角は存在し、およそ 11.3° である）。$\dfrac{1}{5}$ は唐突かもしれないが、おそらく試行錯誤の末に見つけたのだろう。ここで $\tan 4\alpha$ に 2 倍角の公式を 2 回適用すると、

$$\begin{aligned}
\tan 4\alpha &= \frac{2\tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} \\
&= 2\left(\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right) \Bigg/ \left\{1 - \left(\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)^2\right\} \\
&= 2\left(\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}\right) \Bigg/ \left\{1 - \left(\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}\right)^2\right\} \\
&= \frac{120}{119}
\end{aligned}$$

が得られる。$\dfrac{120}{119}$ はかなり 1 に近い。$\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ なのだから、1 に非常に近い $\dfrac{120}{119}$ が得られる 4α は $\dfrac{\pi}{4}$ に非常に近い角だ。実際、$\tan\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ を加法定理により計算すると

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan\dfrac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha \tan\dfrac{\pi}{4}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\cdot 1} \\
&= \frac{1}{239}
\end{aligned}
$$

という、比較的小さな値が出る。

このことから

$$\arctan\frac{1}{239} = 4\alpha - \frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}$$

であるから、$\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$ が分かった。これに（☆）を適用すると（※）になるのである。

駆け足の説明では理解し難いだろうから、詳しく知りたい人はきちんとした数学の書物を読むべきだね。