

3...の散歩道

3.1 円周率

円周率は不思議なもので、古くから多くの人々を魅了してきた。いちばん簡単に円周率を表す数は3である。また、もっとも効率のよい近似値なら3.14というところだろうか。円周率は、小数点以下に不規則な数が並ぶので、昔から有効桁数を高める競争が行われてきた。コンピュータが発達した現代でも、それは続けられている。

円周率を求める古典的な方法は、アルキメデス¹が考案した。円に内接する正 n 角形の周長と円に外接する正 n 角形の周長を計算し、それらにはさまれた値を円周率とすることである。はさまれた値といっても、ある範囲にはさまれてるわけだから、値が確定しない。したがって、内接 n 角形の周長と外接 n 角形の周長で、一致している部分までが円周率の正しい値を示していることになる。

これらの計算をするには、三角比に関する知識があるとよいのだが、ここではアルキメデスの方法で円周率の近似をすることが目的ではない。期待した諸君には申し訳ないが省略させてもらおう。

円周率はギリシア文字 π で代用される。円周率が通常の分数で表せないのが当然の処置だろう。**Python3** には円周率の値が組み込まれていていつでも自由に呼び出せるが、使う前には `import math` と入力して、数学関数を利用できるようにしなくてはいけない。

[py script]

```
>>> import math
>>> math.pi
3.141592653589793
```

円周率は通常の分数で表せないけれど

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

¹シラクサのアルキメデス (287?B.C.-212B.C.): 古代ギリシアの数学・物理学者。

といった、無限級数で表すことは可能だ。これはグレゴリー²もしくはライプニッツ³の功績だ。式が $\pi = \dots$ ではなく $\frac{\pi}{4} = \dots$ と書いてあるのは、その求め方に由来しているが、詳しいことは別の書物を参考にしてもらいたい。右辺を無限に計算することができるなら、その結果はぴったり円周率の値となる。しかし、これは計算機向きの式ではない。なぜなら収束が非常に遅いからだ。収束が遅いことは、計算機の処理速度がいかに速くても致命的なものである。

収束が遅いことは式を見ているだけでも理解できると思う。たとえば級数を5億項先まで加えても、分母は10億程度の大きさである。これでは小数点以下8桁の精度にしかならない。

しかし悲観ばかりしていても仕方がない。収束が遅いことを承知の上で、この方法で **Python3** に計算させてみよう。

[py script]

```
>>> def qpi(n):
...     p = 0
...     sgn = 1
...     for n in range(1, n, 2):
...         p += sgn / n
...         sgn = -sgn
...     print(4 * p)
...
>>> qpi(30000)
3.1415259869231935
```

分母が n までの和をとって円周率を計算する関数 `qpi(n)` を定義した。関数名は、 π の四分の一 (quarter pi) を求める計算式にちなんだ。

`sgn` という変数について話しておこう。`sgn` は符号を変化させるために用意した変数である。こんなものが必要になるのは、 $\frac{\pi}{4}$ を計算するのに、分数を交互に足したり引いたりしているためだ。正の数から足し始めているので、最初の `sgn` には正值の1が代入されている。しかし、符号を転換する目的なら別の方法もある。各自で調べてみよう。

`for` 構文は `range` 関数により、 n が1から関数に与えられた n まで、2ずつ増えながら変化する。 n がかぶっているように見えても、問題ないことは前に見たよね。ちなみに、`in range(1, n, 2)` の第1引数は初期値、第2引数は終了値 (実際はこれより1小さい値が最終値となる)、第3引数はいくつずつ増やすかを示すものである。これらには負の数も使える。

`p += sgn / n` というのは `p = p + 1 / n * (符号)` をひとまとめにしたものと考えてよい。とくに、`p = p + (何々)` を `p += (何々)` とする書き方はよく用いられるし、この散歩中でもお気に

²ジェームス・グレゴリー (1638–1675): イギリスの数学者・発明家。

³ゴットフリート・ウィルヘルム・ライプニッツ (1646–1716): ドイツの哲学・数学者。

入りの表現である。これで、正負交互に $\frac{1}{n}$ が p に加わる。さて、以上の計算で求めたのは $\frac{\pi}{4}$ の値であるから、 p には $\frac{\pi}{4}$ が入っている。それを π の値として表示させるには、`print(4 * p)` としなければならない。