0.4 循環小数の秘密

もうしばらく小数の話題を続けてみよう。

小数には $0.333\cdots$ のような**無限小数**と、0.125 のような**有限小数**がある。また、ひと口に無限小数といっても、$0.333\cdots$ は**循環小数**と呼ばれる数で、円周率 $3.141592\cdots$ のように**循環しない小数**とは区別している。実は、すべての有理数は有限小数か循環小数になる。言い換えれば、分数は必ず有限小数か循環小数にできるということで、決して循環しない無限小数にはならない。その逆に、循環しない無限小数は決して分数にすることはできない。どういうことだろうか。

例えば $\dfrac{1}{6}$ は循環する無限小数である。実際に割り算を行ってみれば一目瞭然だろう。

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 0. & 1 & 6 & 6 \\ \cline{3-6}
6 &) & 1. & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 6 & & \\ \cline{3-5}
 & & & 4 & 0 & \\
 & & & 3 & 6 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 4 & 0
\end{array}
$$

割り算は途中で計算を止めているが、このあとは 6 が続くだけである。その理由は簡単だ。割り算の最後の行に余りである 40 がある。そしてこれと同じ余りがひとつ前にも出ているね。そう、小数が循環する理由は、以前の余りと同じものがでるからなのだ。

分数を小数に直すときは、分子を分母で割るはずである。そのときの余りは、割る数である分母より小さい数しかありえない。具体的には、6 で割り算をすれば余りは $0, 1, 2, 3, 4, 5$ の 6 種類に限られる。つまり余りの種類は、0 を含めて**高々**分母に使われた数だけしかないのだ。そのせいで余りにあたる数は、いつか必ず同じものになってしまう。一度同じ余りになれば、あとは循環するしかないし、余りが 0 になれば割り切れるということなのだから。

それでは、循環する無限小数は、はじめどんな分数だったか気にならないだろうか？　しかし、循環する無限小数をもとの分数に復元するのは簡単である。$0.1666\cdots$ であれば $x = 0.1666\cdots$ とおいて

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 100x & = & 16.666\cdots \\
-) & 10x & = & 1.666\cdots \\ \hline
 & 90x & = & 15
\end{array}
$$

のようにすれば、$x = \dfrac{15}{90}$ であることが分かるのだ。この方法はどんな循環小数にも使える。コツは循環する部分がそろうように、**適当な** 10 の倍数を掛けてやればよい。

ところで循環する無限小数のうち、ひときわ目を引くものがあるだろう。$0.999\cdots$ のことだ。これも同様に $x = 0.999\cdots$ とおいて

$$
\begin{array}{rrcl}
 & 10x & = & 9.999\cdots \\
-) & x & = & 0.999\cdots \\
\hline
 & 9x & = & 9
\end{array}
$$

としてみよう。あれ？　$x = \dfrac{9}{9}$ になったぞ。ということは $0.999\cdots = 1$ なんだろうか。その説明の前にぜひ $0.4999\cdots$ や $0.6999\cdots$ を分数にしてほしい。

雰囲気がつかめただろうか。話をちょっと前に戻すけれど、小数の濃度を調べているときに、すべての小数を $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots$ の形に表したね。このとき、0.5 のような小数は $0.5000\cdots$ とでもするのかなと考えなかっただろうか？　実を言うと、そこには 0.5 や $0.5000\cdots$ のような、いわゆる有限小数は含まれていなかったのである。そこでは 0.5 は $0.4999\cdots$ の形で登場していたのだ。有限小数はすべて $999\cdots$ を含む、循環する無限小数になっていたのである。有限小数は無限小数で表記しておくと都合がよいのだ。そうしておけば、同じ数を 2 回数えることはなくなるから。

さて、話題は $0.999\cdots$ へ戻る。$0.999\cdots = 1$ である。なぜなら $\dfrac{9}{9}$ を実際に割り算してみると、$0.999\cdots$ であることが確認できるのだから。

$$
\begin{array}{rl}
 & \ 0.\ 9\ 9\ 9 \\
\cline{2-2}
9 &)\ 9.\ 0\ 0\ 0 \\
 & \ 8\ 1 \\
\cline{2-2}
 & \ \ \ 9\ 0 \\
 & \ \ \ 8\ 1 \\
\cline{2-2}
 & \ \ \ \ \ 9\ 0
\end{array}
$$

これは何だか不思議な計算だ。でも、あっている。このようなことが起こるのは、割り切れる割り算に 2 通りの表記法があるからだ。ひとつは素直に割り切ってしまう計算である。そうすれば $\dfrac{9}{9} = 1$ となる。そしてもうひとつは、いまの例のように $999\cdots$ と商を立て続けてしまう計算である。こちらが濃度の話に登場した表記なのだ。

それにしても $999\cdots$ には悩まされそうだ。その底流をなすのは無限であることは間違いない。道に迷う前に、循環小数の話へ戻ろう。

循環小数を計算してみると、$\dfrac{1}{6} = 0.1666666\cdots$ のように**循環節**が短いものと $\dfrac{1}{7} = 0.1428571\cdots$ のように循環節が長いものがある。$\dfrac{1}{6}$ は余りが最大で 5 種類出る可能性がある。$\dfrac{1}{6}$ は割り切れないので、0 は余りの種類に含めていない。このことは循環節が最大で 5 になる可能性があるわけだ

が、実際の循環節は 1 だ。ところが $\dfrac{1}{7}$ は循環節が最大で 6 になる可能性を持ち、その通り 6 の循環節を持っている。どんな有理数が、可能な限度を目一杯使うのだろう。いくら **Python3** が浮動小数点数を扱えるといっても、無限に小数点以下を計算してくれるわけではない。そんなときはどうしよう？

いちばんの問題は、循環節の長さの調べ方だ。コンピュータが無限に小数を表示してくれれば楽だが、そうはいかない。そこで発想を変えよう。小数は以前と同じ余りが出たときに循環を繰り返す。すると商を調べるのではなく、余りを調べればよいことに気付くだろう。また、分数は分子が分母より小さいと決めつけてよい。なぜなら $\dfrac{22}{7}$ のような分数は、必ず $3+\dfrac{1}{7}$ のような形にできる。この場合、循環する鍵を握っているのは $\dfrac{1}{7}$ のような、分子が分母より小さい分数である。したがって、分子が分母より大きい分数を考える必要はない。たとえば、次のスクリプトは $\dfrac{1}{7}$ の循環節を調べるものだ。

[py script]
```
>>> r = 1
>>> b = 7
>>> for i in range(1, b):
...   print(r)
...   r = (r * 10) % b
...
1
3
2
6
4
5
```

まず、分数は $\dfrac{a}{b}$ という形だが、いま考えている分数は割られる数が割る数より小さいので、割られる数はすでに余りになっていると考えている。そこで $\dfrac{r}{b}=\dfrac{1}{7}$ と見て代入をしている。

`for` 構文は `while` 構文同様、繰り返しに使う。ただしちょっとした注意が必要である。繰り返しの範囲は `in range()` で指定することが多いのだが、`i in range(1, b)` と書いた場合、`i` を `1` から `b-1` まで、`1` ずつ増やしながら繰り返すということだ。ここでは `b = 7` であったから、繰り返しは `1` から `6` までとなる。これは **Python3** の仕様であり、適切だと思う。

繰り返しの範囲が $b-1$ まででよいことに注意してもらいたい。`b` は分数の分母であった。循環小数は分母の数より多い循環節を持たないので、分母 `b` の回数だけ割り算をすれば必ず同じ余りが出る。もし、そこまでに同じ余りが出現しなければ、その分数の循環節は許される最大の $b-1$ であることが分かるのである。

スクリプトは i = 1 のときに、まず余りとみなした r の値が print 文で表示される。そして、次の余りを求めることになる。

余りを求める処理は注目に値する。次の余りは r = (r * 10) % b で求めている。(r * 10) の計算は余りを 10 倍しているところだ。これはわれわれが割り算をする際、上から 0 を下ろす操作である。続く% b は余りを求める演算である。**Python3** にはいろいろな**演算子**があるものだが、“%” はそのひとつだ。A % B と書いた場合、この演算は “A を B で割ったときの余り” を求める計算なのである。よって一連の (r * 10) % b は、余りの 10 倍をもう一度割って、次の余りを求める操作になっているわけだ。そして、次の余りを r に代入してやれば、再び同じ式でさらに次の余りを求められることになる。

というわけで、与えられた分数の余りが次々と表示され、分数の循環節が長いか短いかは目にできるようになった。しかし、余りを眺めていてもさほど楽しいわけではない。やはり商を眺めて、その分数の特徴を知りたいだろう。だが散歩は始めたばかりだ。われわれには、まだ知るべきことが山ほどある。ここの景色をじっくりと眺めるのは、帰り道で再びこの地に来たときにしよう。