0.2 無限と有理数

さあ整数が出揃って、いよいよ数学の世界の奥へ入っていく準備ができた。数は整数の他にも、様々な種類のものがあることは知っているだろう。続けていろいろな種類の数を紹介したいけれど、まだ整数についてさえ十分に語っていないのだ。それは何かって？　それは “. . . ” の部分。特に “. . . , -10” と “10, . . . ” のところは、単なる省略ではないことを言いたいのである。

ここに使われた “. . . ” は、この先の数を書く意味がないことを示している。なぜなら、書き切ることができないから。当たり前だよね。ところが “. . . ” には、思いもかけない不思議が詰まっている。

君たちは**偶数**と**奇数**は知っているね。自然数に限れば $2, 4, 6, \ldots$ が偶数、$1, 3, 5, \ldots$ が奇数ということになる。ものの集まりを**集合**と呼ぶことにして、偶数の集合を $\mathcal{E}$、奇数の集合を $\mathcal{O}$、そして自然数の集合を $\mathcal{N}$ で表せば

$$\mathcal{E} + \mathcal{O} = \mathcal{N}$$

であることが想像できる。でも、残念ながら違う。想像が事実に合わないことはよくある話。単純な足し算は、偶数や自然数のような**無限集合**にはそぐわない関係なのだ。それについてカントール[1]は次のように説明している。

たとえば “りんごが 5 個ある” とは、各りんごに自然数 $1, 2, 3, 4, 5$ が**一対一に対応**していると見る。このとき、りんごの数（かず）は 5 に等しいと言える。同様のことを偶数と自然数で考えてみよう。すると

$$\begin{array}{lcccccc} \text{偶数} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ \text{自然数} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

のように、各偶数に自然数 $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ が一対一に対応していることになる。したがって偶数と自然数は同じ数（かず）だけある、と考えるわけだ。このときに数ということばは適切でないように思えるので、カントールは**濃度**という用語を使っている。すると奇数に対しても、奇数と自然数は同じ濃度を持つと言えるのだ。

この用語はまったくもって適切で、われわれの生活感覚にも合っている。なぜなら、同じ濃度の食塩水を混ぜると、同じ濃度を持つ食塩水ができるのだから。そして食塩水の量も増えているので、自然数も偶数だけの “量” に比べると、きっと奇数の分だけ “量” が増えているんだろう。

[1]ゲオルク・カントール（1845–1918）: ドイツの数学者。

ちょっと不思議な感覚だけど、日常からかけ離れたものにはありがちなことではある。（想像を超える大金持ちの資産）+（想像を超える大金持ちの資産）は、やはり（想像を超える大金持ちの資産）であるのと同様、“...” はわれわれの想像を超えた世界ということなのだ。

さて、**Python3** が巨大な数を操れることは述べたが、微小な数はどこまで扱えるのだろう？　小さな値になる計算をさせてみよう。

[py script]
```
>>> 1/3000000000000000000000000000000000000
3.333333333333333e-36
```

計算結果の `3.333333333333333e-36` は $3.333\cdots \times 10^{-36}$ を意味する。巨大な数の表し方のように `0.(ここに 35 個の 0)3333` とは表示してくれない。ちなみに version 2.x 以前だと、この計算式の結果は `0L` となってしまうので計算式を `1./` で始める必要がある。バージョンの違いで結果が異なるので注意が必要である。

でも、それ以上に困ったことがある。`1/10**500` の計算だとオーバーフローしてしまうのだ（アンダーフローということもある）。`10**500` なら難なく計算するのに、である。実際 **Python3** では、$a \times 10^n$ の表示で扱える数の**絶対値**はおよそ

$$9.98 \times 10^{-324} \quad \sim \quad 1.79 \times 10^{308}$$

である。10^{308} より大きな数は `inf`、10^{-324} より微小な数は `0` で扱われる。このことは、この先の予定コースにある円周率の計算には都合が悪い。小数点以下 324 桁までしか扱えなければ、π の 1000 桁は夢でしかない。それ以前に、この表示方法では有効桁数が十数桁しかないのも大問題である。ただ、その点は工夫をすることで何とかできるので、この先の散歩道を楽しみにしてもらいたい。

そもそも、無限の大きさや無限に続く計算はコンピュータには向いていない。必ずどこかで計算を打ち切らなくてはならないからだ。では、もし計算を打ち切らなくて済むならどうなるんだろう。たとえば

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

のように、無限に続く計算はできるのだろうか。先頭から順に見れば

$$\begin{aligned}(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots &= 0+0+0+0+\cdots \\ &= 0?\end{aligned}$$

のように思える。でも、くくり方をずらせば

$$\begin{aligned} 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+\cdots &= 1+0+0+0+\cdots \\ &= 1? \end{aligned}$$

とも思える。どっちが正しいのか分からないけれど

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots = x$$

とおけば、これを

$$\begin{aligned} 1-(1-1+1-1+1-1+1-1+1-\cdots) &= x \\ 1-x &= x \end{aligned}$$

と見直すことさえ可能だ。だったら $x=\frac{1}{2}$?。

うわあ、一体どうなっているんだろう。無限の足し算には普通の計算法則が成り立たないのか、無限の計算だから答も無数に出るのか...。いずれにせよ、従来の考えが成立しないことは確かである。散歩をしながら迷路に迷い込んでも困るので、ちょっと道を変えておこう。

無限の数は必ずしも扱いにくいものではない。なぜなら $0.333\cdots=\frac{1}{3}$ だから、小数点以下が無限であっても平気な場合もある。このようにわれわれは、端数を表すために**分数**や**小数**を使っている。身近に分数や小数を使っていると、それらの数は自然発生的に生まれたように感じてしまうものだ。しかし、分数や小数はわれわれ人間が作り出した数なのである。

分数や小数はどちらも“数”と名乗っているものの、性格には大きな違いがある。いまでは $\frac{1}{8}$ と 0.125 は、どちらも同じ量を表す数の扱いを受けている。けれども $\frac{1}{8}$ は、8 つの量に対する 1 の量という比を意味し $1:8$ と表す。すなわち $\frac{1}{8}=1:8$ だ。一方 0.125 は、1 ほどに大きくない量の 0.1 に、0.1 ほどに大きくない 0.02 を加え、さらに 0.01 ほどに大きくない 0.005 を加え合わせた量である。どっちも同じじゃないかって？　そう、量という点ではね。

結局のところ、分数でも小数でも細かい量—これは精密な量と言っても構わない—を表せることに変わりがない。例えば $\frac{10}{3}$ や 3 という値は、**円周率**をおおまかに表している。もちろん円周率というのは、直径に対する円周の比のことだ。でも、これよりも $\frac{22}{7}$ や 3.14 とすることで、さらに $\frac{355}{113}$ や 3.141592 とすることで、円周率をより精密に表せる。ここで注目してもらいたいのが、分数の作り方である。分数はあくまでも自然数の比で表している。一方、小数は数字を増やすことで対処しているが、これは小数に小数を足していく操作になっている。つまり、分数が自然数を継承

して作られる数であるのに対し、小数は自分自身を継承している点に注意してほしいのだ。ここに分数と小数の性格の違いを見ることができるわけだ。

今日では、われわれは $a:b$ の比は $\dfrac{a}{b}$ という分数で表すのが一般的になっている。このように整数 a, b（ただし $b \neq 0$）を用いて $\dfrac{a}{b}$ で表すことができるすべての数を**有理数**と呼ぶことにする。有理数の呼称は慣れないと戸惑うかもしれない。$\dfrac{a}{b}$ で表した数は a rational number（比の数）と呼ぶが、日本語訳が有理数となっているだけのことなのだ。すると、この約束に従えば -5 は $\dfrac{-5}{1}$、0 は $\dfrac{0}{1}$ と表すことができる数なので、整数も有理数であると言えるのである。