5.3 究極の連分数

黄金比が

$$x = 1 + \frac{1}{x} \tag{5.1}$$

の解であることは述べたね。しかし、違った考えで x の解を求めることもできる。

ややこしい話だけれど、(5.1) の $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ を (5.1) の右辺の x に代入してみることだ。つまり

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

ということだ。しかし、右辺にはまだ x が存在するので、再び $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ を右辺にある x に代入すると

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

となるだろう。さらに、右辺にはまだ x が存在するので . . . 。きりがないね。だが、これを無限に続ければ

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \tag{5.2}$$

となることが理解できるだろうか。

このように、分数の中に分数が幾重にもなる分数を**連分数**と呼んでいる。連分数は一般に

$$a = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cdots}}}$$

で表すが、これでは紙面を使い過ぎるので

$$a = [q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ \ldots]$$

といった表し方をすることが多い。連分数の各分子が常に 1 だから可能な記述なのだ。

ところで (5.2) は (5.1) の解だから $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ だ。つまり

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots]$$

なんだね。右辺の連分数には 1 しか使われていないので、連分数の中でも特別な連分数だ。

そもそも連分数が特別なんだから、黄金比はまさに究極の連分数と言えるだろう。でも、ちょっと待って。連分数って本当に特別な分数なの？　次の例を見てほしい。

$$\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} \tag{5.3}$$

有限個の分数で終わっているけれど、これも正真正銘の連分数だ。例が正しいことをぜひ確認してほしい。

実はどんな分数も連分数で表せる。いや、無理数だって連分数になるのだ。この旅では深入りはしないが、有理数は有限連分数、無理数は無限連分数ということが知られているのだ。ちょっと前の旅で、割り切れない分数は循環小数—つまりは規則的な繰り返しをする数—であることを確認したはずだ。それに対して無理数は、不規則な小数だっただろう。でも驚いてはいけない。不規則なのは見せ掛けなのだ。

計算は少々面倒だが、$[1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$ や $[1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$ といった、規則的な連分数がどんな小数になるか計算してみるとよい。もちろん $\ldots$ の部分すべては計算できないので、$\ldots$ の直前で終わっている連分数として計算するわけだけど。

おそらくどこかで目にした近似値になったのではないだろうか。もし、$\ldots$ をすべて計算できれば、正にその数になる。何とも不思議なものだが、詳しくは別の機会に回そう。ここでは、有理数を有限連分数に直すマクロに取り組むことにする。

programming list [ContFrac.vba]

```
Sub ContFrac()
Dim a, b, t, col As Integer

    a = Sheet1.Cells(1, 1).Value
    b = Sheet1.Cells(1, 2).Value

    col = 1: Sheet1.Cells(2, col) = a \ b
    While a Mod b > 0
        t = b
        b = a Mod b
        a = t

        col = col + 1: Sheet1.Cells(2, col) = a \ b
    Wend
End Sub
```

プログラムの説明の前に、(5.3) の求め方を知る必要がある。コンピュータは自ら連分数を作ってくれないのだ。あくまでも人がやる作業と同じことを、短時間でやってのけるだけなのだから。

(5.3) は次のようにして求められた。

$$
\begin{aligned}
\frac{355}{113} &= 3+\frac{16}{113} \\
&= 3+\frac{1}{\frac{113}{16}} \\
&= 3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}
\end{aligned}
$$

いちいち説明の必要はないだろう。ここでは最後に $\dfrac{1}{16}$ が現れて終了となったが、仮に $\dfrac{3}{16}$ にでもなろうものなら、さらに $\dfrac{3}{16}=\dfrac{1}{\frac{16}{3}}$ としていけばよい。最終的に分子が 1 になったところで終了だ。[ContFrac.vba] では、分子が 1 であることの確認を、分数の逆数が割り切れるかどうかでしているけれど、意味するところは変わらない。

このマクロは分子・分母の値を必要とする。ここでは分子を `a`、分母を `b` とし、それぞれ A1 セル、B1 セルから読み込むことにしている。それが 4:, 5: 行目だ。

7: 行目の変数 `col` は、連分数を "$[q_1, q_2, q_3]$" とすることを想定して、ワークシートの 2 行目の列位置を順次示すものだ。ここで同時に `a \ b` の値を表示しているのは、$a > b$ の場合の処置である。

8: 〜 14: 行目にかけては、残りの分数の分子・分母を交換し、次の段階の連分数に展開している。次の段階で分子・分母を交換する必要があるかないかは、分数の逆数が割り切れるかどうかで判断するので、`While a Mod b > 0` を使っている。

9: 行目からは少しややこしいので注意深く読んでほしい。

まず、9: 行目で分母だった数 `b` を一時変数 `t` に保存している。これは必要なことだ。

10: 行目は `a` を `b` で割った余りを `b` に代入しているのだが、余りは分子である `a` に代入するんじゃないの？　そう、確かにそうだが、さらに次の連分数展開ではこの逆数が使われるので、余りは分母にされてしまうはずだ。だから `b` に代入したのだ。

従って、今まで分母に使われていた `b` が新しい分子 `a` になるから、11: 行目で分子・分母の入れ換えが完了する。プログラムはわずか 3 行で連分数展開をこなしているように見える。しかし、人が行う作業が凝集されていることを見逃してはいけない。

このとき連分数展開に現れる次の数は $\dfrac{a}{b}$ の整数部分である。よって 13: 行目の計算結果を表示することになる。

色々な分数の連分数表記を調べると意外な発見があるだろう。[ContFrac.vba] は無理数を連分数にできないが、例えば黄金比 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ なら近似分数として $\dfrac{16180339}{10000000}$ を使ってもよい。試しに、この近似分数を連分数にしてほしい。また、$\dfrac{14142135}{10000000}$ や $\dfrac{17320508}{10000000}$ なども試してみるとよいだろう。