

5...の旅

5.1 黄金比

さあ、これから 5...の旅が始まる。と言っても 5 から旅が始まるのではなく、旅の途中に 5 と出会うのが今までとは違うところだが。

まず、フィボナッチ数列の 2 項の比

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots$$

に再び登場してもらおう。

マクロ [Fratio.vba] で計算したから分かっているだろうが、比の値は $1.618033\dots$ となる。ところでフィボナッチ数列の 2 項の比は、 $\frac{\text{(後の項)}}{\text{(前の項)}}$ で求めたものだ。しかし、比なんだから別に $\frac{\text{(前の項)}}{\text{(後の項)}}$ で求めたっていいだろうに。そう思ったら、フィボナッチ数列の比を $\frac{\text{(前の項)}}{\text{(後の項)}}$ で計算してほしい。電卓でも計算できるが、だいぶ以前に作った [Fratio.vba] の 7: 行目を変更すればすぐだ。

さあ、比の値はどうなった？ ちょっと面白い結果になったのではないか？ 比の値は $0.618033\dots$ である。きっちり 1 だけ違っているだろう。誤差はないのかって？ そう、まったく誤差はないのだ。この面白い性質を持つ比の値は黄金比と呼ばれている。一般には、 $1.618033\dots$ の方を黄金比と呼ぶことが多い。

黄金比とは一体どういう数なのだろうか。計算は簡単にできるので確かめてみよう。

まず、 $1.618033\dots$ に収束する真の値を x としよう。後から求めた比 $0.618033\dots$ は、 x の逆比 $\frac{1}{x}$ のことである。それが x より 1 小さい値に等しいのだから

$$\frac{1}{x} = x - 1 \tag{5.1}$$

が成り立つ。 (5.1) は簡単な 2 次方程式となるが。両辺に x を掛けて整理すると $x^2 - x - 1 = 0$ だから、解の公式を使えば一発で解ける。フィボナッチ数の比は正の値なので、 $x > 0$ の解を求める

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

であることがわかる。黄金比は無理数 $\sqrt{5}$ を含む数なのだ。ここに 5 が登場してきた。解は正の数だけに限っているものの、方程式からひとつの解しか得られないということは、(5.1) の性質を満たす数は黄金比だけということである。

Excel にシミュレートさせてみよう。シミュレートといつても Excel の解析機能を使うのではなく、あくまでもマクロでやるということだ。ここでは (5.1) を移項して

$$x = \frac{1}{x} + 1 \quad (5.2)$$

で x を探ることにする。そのほうが x の値を直接計算できるからだ。ところで、探るという言葉が気になるね。なぜそのような言葉遣いをしたかはマクロを見てもらいたい。

programming list [GRsimula.vba]

```

1: Sub GRsimula()
2: Dim x As Double
3: Dim i, row As Integer
4:
5:     x = Sheet1.Cells(1, 1).Value
6:
7:     row = 1
8:     For i = 1 To 20
9:         x = 1 / x + 1
10:        row = row + 1: Sheet1.Cells(row, 1) = x
11:    Next i
12: End Sub

```

プログラムは実に簡単だ。5: 行目で読み取った変数 x を、8: 行目からの For-Next 構文で繰り返すだけだ。For-Next は 20 回の繰り返しだが、このぐらいで十分収束してくれる。繰り返す計算は 9: 行目の $1 / x + 1$ の計算で、次に再利用できるよう再び x へ代入している。

その経過を表示しているのが For-Next に組み込まれた $Sheet1.Cells(row, 1) = x$ である。これによって 20 回先までの x の値が表示される。A1 セルに色々な浮動小数点数を入力して、マクロを実行してみよう。初期値が何であれ、黄金比に収束する様子が分かるだろう。

プログラムを見て、あれ？ コンピュータが 2 次方程式を解くんじゃないんだ、と感じただろう。そう、コンピュータは計算をする機械であって、問題を解く機械ではない。問題を解く手順は人間が与えるのだ。では、この手順は何をしているのだろう。どう見ても (5.2) と同等な—つまり両辺に x を掛けた—方程式

$$x^2 = 1 + x$$

を解いているのではないね。でも、解である黄金比が求められている。

それなら $x^2 = 1 + x$ を移項した式、 $x = x^2 - 1$ を使っても同じことだろう。そこでプログラムの 9: 行目を $x = x * x - 1$ に変えてみる。さあ、準備は整った。マクロを走らせよう。今度は、A1 セルのどんな値に対しても黄金比に収束する、とは言えないはずだ。

どうして？ 同じ関係の方程式を使ったはずなのに。その秘密はグラフを描けば見えてくる。そして、プログラムがしていることを追ってみれば分かるのだけれど、今はそこに足を踏み入れないでおこう。