3...の旅

3.1　円周率

円周率は不思議なもので、古くから多くの人々を魅了してきた。いちばん簡単に円周率を表す数は 3 である。また、もっとも効率のよい近似値なら 3.14 というところだろうか。円周率は、小数点以下に不規則な数が並ぶので、昔から有効桁数を高める競争が行われてきた。コンピュータが発達した現代でも、それは続けられている。

円周率を求める古典的な方法は、アルキメデス[1]が考案した。円に内接する正 n 角形の周長と円に外接する正 n 角形の周長を計算し、それにはさまれた値を円周率とすることである。はさまれた値といっても、ある範囲にはさまれてるわけだから、値が確定しない。従って、内接 n 角形の周長と外接 n 角形の周長で、一致している部分までが円周率の正しい値を示していることになる。

これらの計算をするには、三角比に関する知識があるとよいのだが、ここではアルキメデスの方法で円周率の近似をすることが目的ではない。期待した諸君には申し訳ないが省略させてもらおう。

円周率はギリシア文字 π で代用されている。円周率が通常の分数で表せないので当然の処置だろう。通常の分数で表せないけれど

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \tag{3.1}$$

といった、**無限級数**で表すことは可能だ。これはグレゴリー[2]もしくはライプニッツ[3]の功績だ。式が $\pi = \cdots$ ではなく $\dfrac{\pi}{4} = \cdots$ と書いてあるのは、その求め方に由来しているが、詳しいことは別の書物を参考にしてもらいたい。右辺を無限に計算することができるなら、その結果はぴったり円周率の値となる。しかし、これは計算機向きの式ではない。なぜなら**収束**が非常に遅いからだ。収束が遅いことは、計算機の処理速度がいかに速くても致命的なものである。

収束が遅いことは式を見ているだけでも理解できると思う。例えば級数を 5 億項先まで加えても、分母は 10 億程度の大きさである。これでは小数点以下 8 桁の精度にしかならない。

[1]シラクサのアルキメデス (287?B.C.–212B.C.)：古代ギリシアの数学・物理学者。
[2]ジェームス・グレゴリー (1638–1675)：イギリスの数学者・発明家。
[3]ゴットフリード・ウィルヘルム・ライプニッツ (1646–1716)：ドイツの哲学・数学者。

しかし悲観ばかりしていても仕方ない。収束が遅いことを承知の上で、この方法で **VBA** に計算させてみよう。

programming list [Greg.vba]

```
 1: Sub Greg()
 2: Dim sign, n As Integer
 3: Dim p As Double
 4:
 5:     sign = 1: p = 0#
 6:     For n = 1 To 30000 Step 2
 7:         p = p + sign / n
 8:         sign = -sign
 9:     Next n
10:
11:     Sheet1.Cells(2, 1) = 4 * p
12: End Sub
```

始めに 2: 行目の `sign` という変数について話しておこう。`sign` は符号を変化させるために用意した変数である。こんなものが必要になるのは、(3.1) が交互に足したり引いたりの計算をしているためだ。始めは正の数から足しているので `sign` には 5: 行目で `1` が代入されている。しかし、符号を転換する目的なら別の方法もある。

3: 行目の変数 `p` は、π の値を格納するために用意している。小数を扱うので倍精度の浮動小数点型だ。初期値として 5: 行目で `0.0` を代入しているが、**VBA** では `#` が付くのは前に話したとおりだ。

とりあえず分母が 30000 ぐらいのところまで和を取るつもりで、6: 行目からの `For-Next` 構文にも `30000` を使っているが、実際は `n` が `30000` になることはない。それは、`Step 2` から分かるように、`n` は `2` ずつ増えるので `n = 29999` で終わりだ。きっちり `For n = 1 To 29999 Step 2` と書くよりも、キリの良い数が見やすいので `30000` を用いている。

7: 行目と 8: 行目が (3.1) のそれぞれの項の計算だ。7: 行目で `p` に `1 / n` を加えて、次は逆の符号になるように 8: 行目で `sign` の符号を変化させている。`1 / n` は小数になるが `p` が倍精度変数であるから、計算結果はきちんと反映される。

さて、以上の計算で求めたのは $\dfrac{\pi}{4}$ の値である。それを π の値として表示させるには、11: 行目のように `4 * p` としなければならない。