8... の豆旅

8.1　新たな符号？

方程式 $x^2 = -1$ は一般に解くことができない。なぜなら、どんな数 x も 2 乗すると $x^2 \geq 0$ となり、負の値にはならないからである。しかし、数学には新しい定義をする技がある。そして、定義があとから矛盾を生じないものなら、それは数学の世界で大きな顔をすることができる。$x^2 = -1$ となる数を定義してしまおう。いまのところは仮想的な数（imaginary numbers）の意味で、その数を i と書くことにする。i は 2 乗すると -1 になるので

$$i^2 = -1$$

という数が定義できたことになる。

これまで数の計算においては、数値だけでなく符号にも注意を払ってきたことだろう。$(+) \times (-) = (-)$ であるとか $(-) \times (-) = (+)$ であるとか。いまの定義よりここに $(i) \times (i) = (-)$ が加わることになった。ただ、こういう書き方をすると i が符号のように見えるが、実際、符号の性質も併せ持つ。$(-) \times (-) = (+)$ が $(-1) \times (-1) = (+1)$ の計算から符号だけ取り出したと見れば、$(i) \times (i) = (-)$ は $(i1) \times (i1) = (-1)$ から符号だけ取り出したと見えなくもない。もっとも、$i1$ は文字式の約束から $1i$ と書いた上で 1 を省略して i とするので、数の $i1$ と符号の i の区別がつかないようなものである。

このことから、符号の立場で積を考えると

$$\begin{array}{ccc} (+) \times (+)\,, & (+) \times (-)\,, & (+) \times (i)\,, \\ (-) \times (-)\,, & (-) \times (i)\,, & (i) \times (i)\,. \end{array}$$

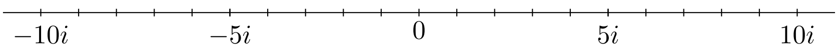
の組み合わせが考えられる。その結果、現れる符号は順に

$$(+)\,,\quad (-)\,,\quad (+i)\,,\quad (+)\,,\quad (-i)\,,\quad (-)\,.$$

である。$+i$ は i じゃないよ。あくまでも符号の立場で見ているので、それらが混ざることはないのだ。さて、$(+)$ が 3 個、$(-)$ が 3 個、(i) が 2 個、合計 8 個の符号が生き残ったことになる。強引ではあるけれど、8... の豆旅にふさわしい数値だ。家でくつろいでいる場合じゃないな。ちょっ

と外に出てみよう。豆旅の再開だ。

さて、符号 i がついた数は**虚数**と呼ばれる立派な数だ。虚数は虚数専用の数直線（虚数直線）に表すことができる。



計算も可能だ。$i^2=-1$ に注意すれば、文字式並みの計算ができる。

$$\begin{aligned} 2i\times 3 &= 6i \\ 2i+3i &= 5i \\ 2i\times 3i &= 6i^2=-6 \end{aligned}$$

ただし、上図の虚数直線は（実）数直線とはまったく違う直線である。そのため、実数 a と虚数 bi の和は $a+bi$ と書く以外にない。つまり、和の形で一つの数を表す。このような数は**複素数**と呼ばれる。この中には $a=0$ や $b=0$ である場合も含まれるから、bi だけでも a だけでも複素数と呼んでよい。ただ、bi なら複素数であることが見て分かるけれど、a だけを複素数と呼ぶのは大げさな気もする。でも、集合の記号を用いて表せば

$$\{2,\ \sqrt{5}\text{ など実数}\}\subset\{\text{ 複素数 }\}、\quad\{-i,\ 3i\text{ など虚数}\}\subset\{\text{ 複素数 }\}、\quad\{2+3i\text{ など }\}\subset\{\text{ 複素数 }\}$$

ということであり、何でもかんでも複素数と言ってよいのである。

ところで、虚数直線の目盛にある 0 が $0i$ じゃないのに気づいているかな？　虚数直線の 0 の位置はたしかに $0i$ なのだが、$0i=0\times i=0$ と決めてある。0 は、数直線・虚数直線に共通な唯一の複素数なのである。

さあ、ここで複素数の四則計算に触れておこう。i が $i^2=-1$ である "文字" と思えば、

$$\begin{aligned} \text{和：}(3-4i)+(5+2i) &= (3+5)+(-4+2i)i \quad = \quad 8-2i \\ \text{差：}(3-4i)-(5+2i) &= (3-5)+(-4-2)i \quad = \quad -2-6i \\ \text{積：}(3-4i)\times(5+2i) &= 3\cdot 5+3\cdot 2i-4i\cdot 5-4i\cdot 2i \\ &= 15+6i-20i-8i^2 \quad = \quad 23-14i \quad (i^2=-1\text{ より}) \end{aligned}$$

の計算は納得できるはずだ。それでは、割り算である商はどうなるだろう。$(3-4i)/(5+2i)$ を考えることにする。

複素数どうしの除算は筆算で割るわけではない。除算は、分数の通分に似た方法で次のように行う。コツは分母の符号違いの複素数を分子・分母に掛けることである。

$$商：\frac{3-4i}{5+2i} \quad = \quad \frac{(3-4i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} \quad = \quad \frac{7-26i}{25+4} \quad = \quad \frac{7}{29}-\frac{26}{29}i$$

結果は $a+bi$ の形をした複素数になった。いま、符号違いの複素数と言ったが、正確には $a+bi$ に対する $a-bi$ の複素数のことである。つまり、虚数側の符号違いだ。このような $a+bi$ と $a-bi$ の複素数を**共役（きょうやく）複素数**という。共役とは、二つで一組になるものという意味である。

なぜそうするかというと、共役複素数の積は実数になるからである。そうすれば分母が必ず実数になる。分母が無理数である数を**有理化**する方法を知っているなら、この計算方法が分母の実数化になっていることが分かるだろう。

さて、再び豆旅に出たところだが、**Java** のコードはまだ目にしてないね。次節でコードを書くことにするので、準備をしておこう。コード化するのは複素数の四則計算であり、それは

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\
(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
(a+bi)/(c+di) &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i
\end{aligned}$$

である。ついでに共役複素数については

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(a-bi) &= 2a \\
(a+bi)(a-bi) &= a^2+b^2
\end{aligned}$$

が成り立ち、ともに実数となることも付け加えておこう。

EX. 上の式、とくに積と商が正しことを確認しよう。