

幽体疑数旅行（‘稠密と連続’の寓話）

1

惑星間通りはいつも様々な‘モノ’たちで賑わっている。近くの小惑星大学に通うアレフ零（レイ）は雑踏の中を‘モノ混み’に流されるようにして移動していた。ふとバナー広告の文字がレイの目にとまつた。

☆ 幽体疑数旅行 ☆ あなたもいかが？

レイはなんだろうと思いつつバナー広告をくぐり抜けた。惑星間通りのバナー広告は店舗の入り口にもなっている。広告面をすり抜けると目の前は旅行代理店のカウンターだった。カウンターに座っているコンシェルジュが声をかけてきた。

「ようこそいらっしゃいました」

レイはおそるおそる口を開いた。

「あのー。バナー広告の幽体疑数旅行ってのが気になって入ったんですけど」

「幽体疑数旅行ですね。それはこの場で疑数旅行ができる当店おすすめのプランですよ。どうぞこちらの席へおかけください」

コンシェルジュはそう言うとレイを手招いた。疑数旅行って何だろうと思いつつレイが示された席に座るとコンシェルジュは続けて説明を始めた。それによると幽体疑数旅行とはこの旅行社が超常科学大学数学科と共に開発した手法で体から精神を分離するのだという。そして幽体となった精神が疑似数空間を自由に移動するというものらしい。しかしレイはなおさらわからなくなつた。疑似数空間？

コースは‘サテライトコース’と‘シンクロコース’の2種類だけだ。旅行時間はサテライトコースが1時間でシンクロコースが2時間である。どちらのコースでもコンシェルジュが同行するが何度も旅行

を楽しんだ客はコンシェルジュをつけずに利用するようだ。

サテライトコースの料金は日帰り客に人気の惑星周回ツアーと同じくらいという。シンクロコースの料金はシニアに人気の惑星巡り8日間ツアーと同じくらいという。だが1-2時間の旅行でその値段はちょっと高くないか？　レイは疑問を正直に口にした。

「それは承知しています。でも開発したばかりで需要も手探りなものですからどうしても資金面で割高にせざるを得ないのです」

コンシェルジュは申し訳なさそうに言って付け加えた。

「でも。あなたは学生ですよね？　だったらお試しコースをご用意できますよ。お試し時間は15分ほどで料金はサテライトコースの半額です」

旅行時間が1/4なのに料金は1/2というのは少しがめつくれないか？　レイはまたもや頭の中の疑問を口にした。もちろん別の穏やかな言葉を使ってだけど。

「ご指摘のとおりです。でもコンシェルジュがつくのでやむを得ないです。人件費が費用の大半を占めますから」

レイは渋い顔をしていたのだろう。コンシェルジュはさらに続けた。小声である。

「料金1/3でどうです？　いますぐお試し体験ができますよ」

サテライトコースの1/3の値段か。それにこの場で体験できるんだよな。試してみるのもいいかもしね。でもレイはもう少し交渉してみようと思った。

「あとちょっとだけ安くならない？　それならすぐ参加するけど」

「わかりました。あと 1/10 値引きしましょう」

コンシェルジュは周りを気にしながらさらに小さな声で言った。結局サテライトコースの 1/4 ほどどの値段になったので体験時間に見合った額だ。レイは納得顔になった。

2

『ではご案内します』

コンシェルジュに案内された部屋は少し広めでいくつかのブースに区切られていた。コンシェルジュは目的のブースへ向かいながら説明を始めた。

『いまは幽体疑数旅行のためのブースは 3 室だけです。A ブースは一体のお客様がお使いなので B ブースへ行きましょう』

B ブースへ入るとシートが 2 席あった。客とコンシェルジュの席らしい。コンシェルジュにうながされてレイは片方の席へ体を沈めた。コンシェルジュも隣の席へ着いた。すると後方から音もなくヘッドフードのようなものが降りてきて顔を覆ったのだ。でもフードは透明だったからレイは平常心を保っていられた。レイはコンシェルジュにリラックスしていくくださいと言われたところまでは明確に覚えていた。でもちょっとの時間だけ意識が飛んだようだ。気がついたときはすでに濃い霧の中にいるように感じたからである。コンシェルジュの声がした。

『疑似数空間です』

声はくぐもって聞こえた。

『ここが？ なんだか霧の中にいるようだけど』

レイも自分の声がくぐもっているようだ。

『ええ。でもご安心ください。さっそく繁華街付近をご案内しましょう』

繁華街ってなに？ そう思ったレイにコンシェルジュは続けて言った。

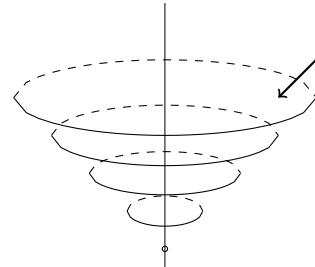
『お試しで時間も限られていますからね。いちば

んの有名どころですよ』

コンシェルジュに連れられて霧の中を移動するレイの感覚で‘下の方’が少し賑やかになったよう感じた。様子を探るとずっと下の方ほど賑やかさが増しているようだ。コンシェルジュの声がした。

『潜りますよ。お試しですから深度 1 までしか潜れませんが』

潜る？ 深度って？ レイにはなんのことかわからなかったがコンシェルジュの声のあとに体がカクンと揺れて沈むような感覚を覚えた。すると少しばかりの賑わいがレイの体に浸透してきた。陽気なざわめきである。おお。これはいい。心が躍る。レイの心からイライラやギスギスした感情がほんのちょっと取れて気持ちが丸くなるようだった。いい気分であることをコンシェルジュに伝えると弾んだ声が返ってきた。



『そうでしょう。でもまだ繁華街の外縁部です。正規のコースでのご旅行ならどこまでも潜って中心部へ行けますよ。とくにシンクロコースなら完璧にシンクロナイズできます』

レイには完璧なシンクロナイズが何を意味しているかわからなかったがきっと素晴らしいものだろうと思われた。ぜひ体験したいものだ。そう思っているとコンシェルジュは続けた。

『次の場所へご案内します』

ええ？ もう？ お試しだからそんなものか。繁華街に未練を感じつつレイは別の場所へ案内され

た。するとその場所は下の方からきりっとした霧氷が伝わってくるようなところだった。繁華街とは真逆の心地よさが感じられる。

『ここは沼です』

沼と言われてレイはちょっとびっくりした。なんでそんな恐ろしげな場所に案内するの？ レイの気持ちを察したかのようにコンシェルジュは続けた。

『沼という呼び名はおかしいですか？ でもハマるお客様は大勢いらっしゃいますよ。深度1まで潜りましょう』

潜るとカクンと揺れたレイの体に規律のような清涼感が浸透してきた。なんだか心が整うようだ。さらに潜ればきっとこの度合いは大きくなるのだろう。これもいいじゃないか。繁華街とは違う心地よさに浸っているとコンシェルジュの声が割り込んできた。

『ここは沼の淵ですね。沼にどっぷり浸かりたくなったらぜひ正規のコースをお申し込みください』

コンシェルジュは売り込みに抜かりはないようだ。値引き分を回収したいのかもしれない。レイもその気になってきた。しかしこれで時間切れであつた。目の前の霧が晴れたと思ったときレイの目の前にはヘッドフードがあった。

「いかがでしたか？」

コンシェルジュが聞いてきた。レイはとてもよい体験ができたことを伝えて近いうちにまた来店することを約束した。

3

今日のレイは心が弾んでいた。前回試した幽体疑数旅行をサテライトコースで申し込むからだ。実は友人に惑星周回ツアーを誘われていたけれどやっぱり疑数旅行に行ってみたかった。レイは勇んで旅行代理店のカウンター席へ着いた。そしてコンシェル

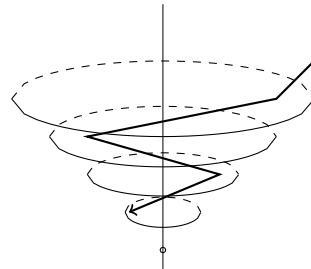
ジュにサテライトコースを申し込んだのである。今回はすべてのブースが空いていたのでレイたちはAブースを使うことにした。

前回と同様にブースの席に収まったレイは心なしか緊張していることに気づいた。どんな体験ができるのだろう？ この前の何倍も素敵な時間を過ごせるに違いない。ヘッドフードが目の前に降りてきた。コンシェルジュの声がする。リラックスするよう言っている。前回と同じルーティンなのでレイは大船に乗った気分でいられた。そして少しすると周りは霧の世界になっていた。船が座礁するときってこんな霧氷のときだろうかなどと余裕を見せるレイであった。

『まず繁華街へ向かいましょうか？』

コンシェルジュに聞かれてレイはもちろんと即答した。移動の際にカクンとした揺れを感じる。下の方に賑やかな様子が認められたときレイは繁華街の近くに来たことがわかった。コンシェルジュに潜ると言われてレイは自分が深度1まで潜ったこともわかった。気持ちが丸くなるような度合いが前回と同じくらいだったからだ。

『一気に深度4まで潜りますよ』



コンシェルジュが言うとレイはカクカク揺れて潜った。するとどうだろう。さっきの何倍もの丸くなる感じがレイを包んだのである。深度1とは比べものにならない。おいおい。深度4でこれか。いったいどこまですごいことになるんだろうとレイは興

奮してきた。その様子を見てコンシェルジュが深度 5 へ潜ることを提案したのでレイはふたつ返事で同意した。うひゃー。期待が膨らむ。

カクンと揺れたことでレイは深度 5 へ潜ったのがわかった。ところが深度 5 まで潜ったはずなのになぜか気持ちの丸みが増したように思えなかった。レイが戸惑っているとコンシェルジュが説明してくれた。

『繁華街は精神に与える影響がまだら模様なんです。深度 4 までに大きな変化を感じられますがそこからしばらくは変化は微量なんです。でもその先はときどき大きな変化を受けますし影響が減ることはありません』

そういうことか。レイは少しがっかりしたが先へ潜るほど効果が大きくなるならそれでもいいかと思った。じゃあもうちょっと潜ってみようか。レイはたしかに潜るたびに丸みの度合いはまだら模様だが間違いなく増しているのがわかった。

それに潜っている最中にレイは少し変な体験もした。自分のすぐ近くを何かがすっと通り抜ける気配を感じたのだ。幽霊でもいるのだろうか？ ちょっと不安になったのでコンシェルジュに聞いてみた。

『それはほかのお客様です。シンクロコースをご利用なのでしょう。われわれとは違うルートで潜っているのです』

ほかの客と聞いてレイは納得した。客は幽体になっているのだから幽霊と思ったのも無理はない。レイはある程度まで潜って十分堪能したところでコンシェルジュに次の場所へ移動したい旨を伝えた。

『では沼へ行きましょう』

レイは沼でも十分満足したいと思った。前回の沼訪問はまったく物足りなかったからだ。繁華街とは

真逆の心地よさは何かから発するのだろう？ そう考えながら沼に案内されたレイは深度 1 深度 2 と潜りはじめた。カクカク潜るたびにこの前の感覚が蘇ってくるばかりか良心とか正義とかをまとっているような気分になっていた。これは今までの人生で味わったことのない感覚であった。この感覚をレイは自分なりに‘昇華’と呼んだ。

ただ少し妙なところもあった。繁華街でもそうだったのだが自分では同じように潜っているつもりなのだが潜った先がちょっとずれるような感覚になる。そのため向きを修正しながらまた潜るのだがやはりずれる感じがする。せっかく昇華したような感覚もそのたびにちょっとしぶんでしまうようだった。変だなと思っているとコンシェルジュが理由を教えてくれた。

『サテライトコース特有の現象です。シンクロコースならずれる感覚は生じません。本当になめらかに潜れるんですよ』

なめらかに潜れるというのはカクンとした揺れないということか？ 要するにもっとスムースに旅程を楽しめるということなんだろう。

『そういうことです。でもそろそろ時間ですね』

レイはもうそんな時間かと思った。繁華街で少し時間を取りすぎたせいだろう。結局この前訪れたところを深く潜っただけになってしまったのは残念だった。

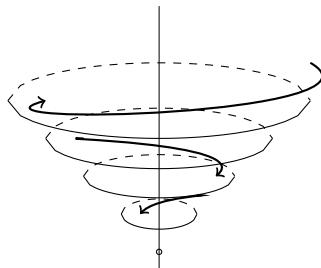
『次回はぜひ別の名所を案内したいですね。よかつたらシンクロコースはいかがですか？』

コンシェルジュが商売っ気を隠そうともせず言った。レイもそうしたかったが高額コースには手がない。今度もサテライトコースになるだろう。そう考えながらレイは現実世界に戻ってきたのだった。

4

レイが満足のついでブースを出ると隣の B ブースに客がいるのが見えた。B ブースにはコンシェルジュの姿はなかったのでおそらく常連客だろう。きっとシンクロコースを旅行しているのだとレイは勝手に思った。しかしシンクロコースは惑星巡り 8 日間ツアー程度の料金だったはずだ。やはりレイには高額すぎる。でも一度は行ってみたいものだと思い旅行代理店をあとにしたのだった。

レイたちが A ブースで旅行に出かけたすぐあとに B ブースにはひとり客が入っていた。B ブースで高額のシンクロコースを利用していたのはニノ・アレフ令嬢（ニノ嬢）であった。ニノ嬢は慣れたものでひとりでいろいろな名所巡りを楽しんでいる。今回も真っ先に繁華街を訪れていた。ここはニノ嬢のお気に入りのひとつであった。



ニノ嬢はいつものように繁華街の中心部へ向かって潜っていった。毎日のストレスからくるトゲトゲしさは潜るたびに薄れて精神が丸みを帯びてゆく。繁華街はまだら模様であるがニノ嬢は潜る際に影響を受けることはない。ニノ嬢が潜るときにカクンとした揺れが一切ないのはなめらかに移動できるからである。そのため周りに霧が発生することもない。スムースに移動しているからレイたちの横を通過したことも気づかなかった。ニノ嬢の耳には心地よい陽気な賑わいが一定のリズムで届いている。あ一快適。ニノ嬢は独りごちた。

今日は溜まった疲れを全部取り除こうと思いニノ嬢はいつもより深く潜ることにした。潜るときの感覚は心地よさがいつも一定している。なぜなら繁華街の‘真髓’にシンクロナイズしているからだ。精神の丸みと心地よい賑わいがニノ嬢のストレスを減らし活力を与えてくれる。ニノ嬢はこれを自分なりに‘浄化’と呼んでいた。よし。行けるところまで潜ってやれ。ニノ嬢は潜り続けた。今までにない深度までできている。ニノ嬢は精神が丸くなり続け繁華街と完全に同期していると思った。ニノ嬢はもうこの疑数旅行から抜けられないなと感じた。

それに常連客であるニノ嬢はシンクロコースに新たにオプションが加わることを耳にしていたのだ。深度 ∞ まで潜れる技術がもうじき完成するらしい。そうしたらすごいことだ。繁華街でも沼でも好きな地点と完璧に同期できるからだ。ニノ嬢はオプションの完成が待ち遠しかった。 β 版があれば誰よりも早く体験したいと思った。そうだ。ニノ嬢は資産家の令嬢である。旅行代理店のひとつやふたつ買収するくらい屁でもない。ニノ嬢はこの際だから買っちゃおうかと考えながら潜り続けるのだった。

★

稠密と連続

無限集合とひとくちに言ってもその度合いは異なる。度合いは濃度という考え方で表される。寓話: 銀河無限鉄道で述べたとおりたとえば自然数の集合の濃度は \aleph_0 （アレフ零）である。有理数の集合の濃度も同じく \aleph_0 である。有理数は自然数と一対一に対応するので 1, 2, 3, ... と‘数える’ことができるので。このような無限集合は加算無限集合と呼ばれる。

一方で実数の濃度は \aleph (アレフ) である。実数は自然数のように数えることはできない。自然数と一対一に対応できないからである。詳細は述べないが実数に自然数を対応させようとしても自然数では足りないので。したがって $\aleph_0 < \aleph$ がいえる。このような無限集合は非加算無限集合と呼ばれる。

さらに付け加えると可算集合の濃度 \aleph_0 と非可算集合の濃度 \aleph の間には $2^{\aleph_0} = \aleph$ の関係があることが知られている。また実数は連続体の濃度 \aleph をもつという。 \aleph_0 と \aleph の違いについてもう少し述べておこう。

感覚的な言い方をすると濃度 \aleph_0 の集合は‘ぎっしり’で濃度 \aleph の集合は‘べったり’という違いがある。ぎっしりからは隙間なく‘詰まっている’様子がうかがえる。数学の用語では稠密（ちゅうみつ）という。一方べったりからは隙間なく‘つながっている’様子がうかがえる。数学の用語では連続という。

稠密とはどのような状態を指すのか。それは「ある集合の元においてその元を含むどんな小さな範囲にもその集合の他の元が存在する」ことである。自然数の集合を数直線で考えたときたとえば 1 を含む $[0.5, 1.5]$ の範囲には 1 のほかに自然数は存在しない。したがって自然数の集合は稠密ではない。

しかし有理数の集合においては 1 の前後のどんな小さな範囲をとっても必ず有理数は存在する。たとえば $[1, 1.0001]$ の範囲には中点である 1.00005 が存在する。つまり有理数の集合は稠密である。整数と有理数は同じ濃度 \aleph_0 であっても稠密でない集合と稠密な集合があるということだ。

それなら連続とはどのような状態を指すのか。それは‘ある集合における極限値として近づく値がその集合に存在する’ことである。たとえば

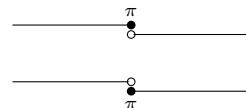
1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, ...

は有理数の集合における極限値としてある値に近づいている。ある値とは $\sqrt{2}$ なのだが $\sqrt{2}$ は有理数の集合に存在しない。したがって有理数の集合は連続ではない。

有理数とは寓話: 銀河無限鉄道で一覧表にできたように $\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ で表せる数である。つまりは整数比の数なので‘比数’と言う方が的を射ている。整数比でできぬ数が無理数である。ならばこちらは‘非比数’とでも言おうか。したがって実数は有理数と無理数にきっちり二分される。

しかし実数の集合における極限値としてなら近づく値 $\sqrt{2}$ は実数の集合に存在する。つまり実数の集合は連続である。

稠密と連続の違いを数直線の切斷^{*1}という考えで述べることもできる。数直線は一点々々が無数に集まっていると考えて数直線をたとえば π の位置で切斷すると



のいずれかの切斷が起こる。一点 π が半直線の両方にあるとか両方にはないとはならない。このことは数直線が π の位置でつながっていたことを意味する。すなわち連続である。

一方で有理数だけが無数に集まっている有理数直線を考えよう。見た目は本来の数直線と変わらないだろう。有理数は稠密なのでどんな小さな範囲にも有理数はあるからこの性質だけでは本来の数直線と見分けがつかないと思われる。しかしこの有理数直線を π の位置で切斷すると

^{*1} デーデキントの切斷ともいう。リヒャルト・デーデキント (1831–1916) : ドイツの数学者。

$$\frac{\pi}{8}$$

となってしまう。もちろん π が有理数でないからである。このことは有理数直線が π の位置でつながっていなかったことを意味する。すなわち連続ではない。感覚的にはこの方がわかりやすいかもしれない。

☆彡

[[レイ/ニノ嬢の足あと]]

レイが旅した繁華街は実は円周率 π を模したものである。 π はそれ自体が人気の値だ。だから大勢が群がって賑わいを生むのである。

$\pi = 3.14159265358979\dots$ のだがこれを連分数で表すひとつの例として

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}$$

がある。深度 1 とは連分数の 1 段下—すなわち $3 + 1/7$ まで—を意味したのであった。近似値は

$$\frac{22}{7} = 3.142\dots$$

である。小数点以下第 2 位まで一致している。深度 4 は $3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/292)))$ までを意味したのであった。近似値は

$$\frac{103993}{33102} = 3.1415926530\dots$$

である。小数点以下第 9 位まで一致している。一気に精度が 7 桁も増したわけだからレイが感じる気持の丸みが何倍にもなったのは当然だろう。しかし深度 5 は $3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/1))))$

までを意味し近似値は

$$\frac{104348}{33215} = 3.1415926539\dots$$

で小数点以下第 9 位までの一一致にとどまる。だからレイは変化を感じられなかったのだ。

繁華街がまだら模様というのは連分数に現れる数が一定していないことを指している。もちろんまだら模様でない場所もある。そのような場所としてコンシェルジュは‘階層パルテノン’などを隠し玉にもっているのだ^{*2}。

またレイが潜るたびにずれを感じたのは π の近似値が

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \dots$$

のように飛び飛びの値で近似されているせいである。飛び飛びに π へ近づかなければならない理由は有理数が連続でないからだ。有理数だけで近似すると 3 と π の間にあるたとえば $\sqrt{9.5}$ の値をとることはできない。このような無理数がレイの周りで霧となっているのである。

一方ニノ嬢は数直線を $\xrightarrow{3 \rightarrow \pi}$ のように移動できる。つまり連続した値をとれるため 3 と π の間にあるたとえば $\sqrt{9.5}$ の値をとりつつ π に近づけるのだ。

実はニノ・アレフ令嬢という名前は 2^{\aleph_0} をもじったものだ。 $2^{\aleph_0} = \aleph$ であるからニノ嬢は連続体の濃度を扱えるという設定である。したがって 3 から π へ向けてなめらかに潜っていけたのである。

ちなみになめらかは数学用語である。‘なめらかな関数’のように使う。

ところで潜っている途中でニノ嬢はレイたちの横

^{*2} ‘黄金比 連分数’で検索するとよい。

をすり抜けたがそのことに気づかなかった。シンクロコースを利用しているニノ嬢は深度を連続的に変えて潜るので障害物を余裕で避けられる。有理数を伝う必要がないからだ。だから周りを気にする必要もない。しかしレイは霧を通してニノ嬢の気配を感じたため幽霊のように思ったのだろう。

レイが繁華街の次に訪ねた沼は $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ を模したものだった。これは潜るたびに

$$2, \frac{9}{4} (= 2.25), \frac{64}{27} (\approx 2.37), \frac{625}{256} (\approx 2.44), \dots$$

と値が大きくなるのだが 3 を超えることはない。つまりある値に収束するのである。その値は $2.71828182845\dots$ という無理数で数学では重要な定数だ。自然対数の底と呼ばれ ‘e’ で表す。e は重要だが π ほど有名ではない。レイにはなじみがなかったのも無理からぬことであった。

レイがこの値に規律・良心・正義を感じたのには訳がある。たとえば年利 r で借金 A をすると

1 年後の元利合計は $A(1 + r)$

である。これを月利 $\frac{r}{12}$ に変えて利子がこまめに乗るようにすると

1 年 (12 か月) 後の元利合計は $A \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$

になる。利子をもっと細かく日利 $\frac{r}{365}$ にすれば

1 年 (365 日) 後の元利合計は $A \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365}$

になる。さらに時利 $\frac{r}{365 \times 24}$ · 分利 $\frac{r}{365 \times 24 \times 60}$ · 秒利 $\frac{r}{365 \times 24 \times 60 \times 60}$ · ミリ秒利 · ナノ秒利 · … と細かくすればするほど 1 年後の元利合計は $n \rightarrow \infty$ のときの $A \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ になるだろう。

しかし $n \rightarrow \infty$ だからといって際限なく大きな値になるわけではない。結果だけ記せば Ae^r 止まり

なのである。欲望が押さえられてしまうと言ってもよい。規律・良心・正義とはこのような性質を表したものだった。

具体的に年利 15% で 100 万円を借りる場合

$$A(1 + r) = 100(1 + 0.15) = 115 \text{ 万円}$$

が一年後の元利合計である。一方こまめに利子を乗せた極限は

$$Ae^r = 100 \times e^{0.15} \approx 116.1834 \text{ 万円}$$

である。乗せる利子を極限まで細かくしてこれなら良心的な上乗せと思ってよいかもしれない。

ところで $n \rightarrow \infty$ のとき次の等式が成り立つ。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

これは左辺を展開して右辺になるのではない。単に等式として成立するということである。すなわち $n \rightarrow \infty$ なら右辺の値も e である。でもこれが沼にハマる要素ではない。実は e は虚数と絡んだとき真価を發揮する。それが沼なのだ。沼の入り口は寓話: 点影の落書きにある。入り口からのぞくだけなのだが…。

さて。有理数で π —または e (以下では省略) — が近似できても π に到達できるわけではない。無理数は極限操作をしてはじめて得られる値だからだ。

レイは N_0 の濃度で旅行するなら決して π の真値を味わうことはない。ニノ嬢もたとえ N の濃度で潜っても有限の深さに留まる限りは π の真値は手に入らない。しかしひノ嬢は資産家の令嬢である。高額間違いなしの極限オプションが使えるのだ。きっと繁華街の深淵にある‘真円’に触れられるだろう。