

惑星間通り蚤の市（‘選択公理’の寓話）

1

今日のアレフ零（レイ）は日帰りの惑星周回ツアーにひとりで参加している。以前友だちから誘われたのを疑数旅行のために断っていたことが心に引っかかっていたのだ。大学の試験が近かったけれど少し気分転換もしたかった。このツアーは料金が手頃で人気なのだが参加者のお目当てのひとつが蚤の市である。蚤の市は数ある惑星間通りに定期的に開かれ大勢の客で賑わっていた。レイは幸福感に満ちた賑わいが疑数旅行で訪れた繁華街に似ているなと思った。

いまは惑星を巡ったあとの買い物時間でレイはどの通りに入ろうか思案していた。ふと見るとさびれたふうに見える通りがある。レイはちよっとのぞいてみようと思った。レイは‘渋好み’なのだ。通りに入ると店は数店あるだけで客はひとりもいないようだった。

「あんたも出店するのかい？」

背中から声をかけられてレイは振り向いた。

「いいえ。買い物をしようと思って」

レイに声をかけたのは出店する予定の店主だった。この通りの蚤の市は来週からでいまは出店の準備中だという。どうりでさびれて見えただけだ。それじゃあ買い物は無理だなと思い通りを出ようとすると呼び止められた。

「せっかくだから見ていきなよ。気に入ったものがあればこっそり売ってあげるよ」

そう言われてレイは少し見て回ることにした。いま準備中の店は4店だけである。どの店も商品が完全に揃ってなくてせいぜい数十点の品が置かれているだけであった。それでもひと通り見て回るとレイ

の興味を引く商品がいくつか見つかった。そこでレイは4店すべてで商品を見渡した上で欲しい品を1個ずつ指差して買ったのである。買った品物は手持ちの袋へ入れてからバッグにしまった。

さて。正規の通りへ行こうとしたとき新たに出店準備をはじめた2店が目に入った。見ていると出店予定地に商品を運び入れている。すごい量だ。しばらくすると2店とも無限の数の商品が積み上げられていた。

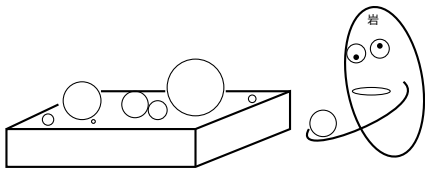
一方の店は古着を扱うようだ。それにしてもこんな大量の服をどこから持ってくるのだろう。もう一方の店は手作りのアクセサリーを扱うようだ。店主と思しき‘モノ’は大量に積まれた商品を横目にせせと新しいアクセサリーを作っている。よく見ると1個分の材料から2個のアクセサリーを作っているようだ。なんでそんなことができるんだろう。ここはそういう物を売る通りなのだろうか。

レイはいますぐ服やアクセサリーが必要ではなかったので無限の数の商品を眺めるだけであった。あの服はよさそうだな。それに合うアクセサリーはあれか。買うならあの服1点とあのアクセサリー1点かな。などと呑気に想像して正規に開かれている蚤の市へ向かうことにしたのだった。

2

‘宇宙石通り’という名の通りがレイの目にとまった。名前からは各惑星で採れた宝石などを売る店が多くあると思われる。レイは宝石のみならず珍しい石を集めるのが趣味であった。だからこの通りの蚤の市を見て回ろうと思い迷わず通りに入った。通りは大勢の客で混雑していた。しかも無限の数の出店があり通りの先は見通すことができない。うわあ。大盛況だ。レイは‘モノ混み’に圧倒されてしまった。

これではとても全部の店を回ることにはできないな
と思いながら通りの入り口に一番近い店をのぞくこ
とにした。この店は主に奇岩を扱っていた。レイは
飛び上がらんばかりに喜んだ。なぜなら奇岩はレイ
の‘大好物’なのである。最初の店からこの調子だ
とこの先どうなるんだろうと興奮のるつぼと化した
レイであった。この店の全部の品を買い占めたい欲
求が湧いてきたが無茶をするわけにはいかない。そ
こでレイはとりあえず小さな奇岩を買ってみよう
と思い店主に声をかけた。



「この中でいちばん小さい岩はどれですか？」

レイは店主がその岩を指し示すと思ったのだが意
外な答えが返ってきた。

「いちばん小さいものなんてないんだよ」

まさか。冗談だろうと思いレイは商品全体を隅々
まで眺めてみた。するとどうだろう。商品の数は無
限の数あるではないか。さらにこれがいちばん小
さく見えると思って近くにはより小さい岩が見
つかるのだ。レイが困惑していると店主は続けて
言った。

「もちろんいちばん大きなものもないよ」

‘流石’にレイも冗談はよしてくれと言おうとし
た。しかしいちばん大きく見えると思った岩でも近
くには必ずわずかに大きい岩が見つかるのだ。だか
らといって際限なく大きな岩はなく陳列台からはみ
出る岩を見つけることはできなかった。不思議そう
な顔をしたレイに店主は言った。

「迷っているようですね。それではこれなんかど
うです？ この中にある岩のちょうど真ん中の大

きさの岩ですよ」

見ると手頃な大きさの奇岩であった。それに形も
いい。レイは店主がすすめた奇岩を買って店をあ
とにするのだった。

3

奇岩をひとつ手に入れたレイは他の店も見回っ
た。どの店も魅力的な奇岩や宝石が無数に並べられ
ていて何を買ってもはずれがないような状況にレ
イは夢中になった。どの店からもひとつは石を買い
たいものだ。しかし店の数は無限にある。どうや
って買えばいいんだろう。あまりに夢中で店を回っ
ていたためレイは肝心なことを忘れていたのに気づ
いた。

「そうだ。クローラーが使えたんだ」

クローラーはツアーが提供しているサービスで買
い物の代行をしてくれるロボットである。客がク
ローラーに指示を与えれば自動ですべての店を巡回
して商品を買ってくれる。クローラーの優れたとこ
ろは無限の数の店からでも買うことができる点にあ
る。レイにはどんな仕組みでそれが可能なのか理解
できなかったけれど間違いなく買い物を遂行してく
れるのは心強かった。

ただ問題というほどではないが注意しなくてはな
らないことがひとつあった。ロボットは融通がきか
ないので的確な指示を与える必要があることだ。指
示が曖昧だとクローラーは働かない。ときどき不十
分な指示のため働かないクローラーに八つ当たり
する客もいると聞く。レイはとりあえずクローラー
サービスを利用することにした。

しばらくするとクローラーがレイのもとへ自走し
てきた。クローラーから金属的な声が発せられた。

『シジヲ アタエテ クダサイ』

レイは無限の数の全店から石を買うのにできれば

いちばん小さい石にしたいと思った。その方が安上がりと考えたからだ。しかしさっきのやり取りからいちばん小さい石という指示ではクローラーが石を特定できないことも学んでいた。

レイがクローラーに与えた指示は陳列台にある石のちょうど真ん中の大きさの石を買ってくることであった。

『シジヲ ウケツケ マシタ』

レイはクローラーに空の袋をひとつ渡して送り出した。クローラーは素早く店と店を巡り次々と袋に石を買い集めている。しばらくその様子は見えていたがやがて遠くの雑踏に紛れて見えなくなった。

少し時間が過ぎたころ遠くにこちらへ向かってくるクローラーが見えた。レイが送り出したクローラーだ。真っ直ぐに向かってくるので買い物は済んだのだろう。クローラーはレイの目の前に着くと袋を手渡した。

『オマタセ シマシタ』

袋の中には無数の石が素敵な輝きを放って収まっていた。それにしても無限の数の店からよく買えたものだ。感心しながらもレイは支払いの処理をしてクローラーを見送った。大満足の成果であった。

4

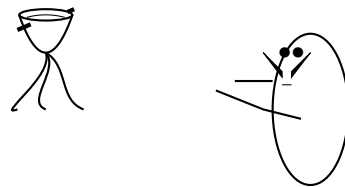
惑星周回ツアーの帰りの集合時間にはまだ少し間があったのでレイは別の通りを見て回ろうと思い‘混沌通り’に入ることにした。混沌通りも大賑わいであった。レイはひとつの店をのぞいてみた。その店は混沌の名に負けじと陳列台の上は雑然としたものだった。台には無数の商品が置いてある。しかし宇宙石通りと違って商品が統一されてはいなかった。アクセサリや食品や衣料品や機械類や玩具や...無数のあらゆる商品が置かれている。しかも陳列台からはみ出たものや無造作に路上に浮

かんで置いてあるものなど結構無秩序に並んでいるのだ。うわ。超絶雑貨店か。

念のため他の店にも寄ってみた。やはりどの店もカオス状態だった。その上どの店にもレイがはじめて見る商品があり衝動買いをしそうになるのだった。しかしそれでは散財のしすぎだろうと思い自重することにしたのである。今度お金が貯まったら来ることにしよう。そして思う存分買い物をするんだ。そのときはまたクローラーに買い物を任せればいいのだから。そう思ったレイだったがふと考え込んでしまった。

というのもこの通りで全店から商品を買うためにクローラーに与える指示はどうしたらいいのだろうか？ 宇宙石通りではどの店の陳列台も規格外のものはなかった。だから大きさに関して中央のものを指定できたのだった。しかし混沌通りは違う。規格外のものがあるので大きさが真ん中という指定では商品を特定できないことになる。それではクローラーは働いてくれないのだ。

考えているうちに時間が過ぎてゆく。レイはそろそろ戻らなくちゃと思い通りを抜けようとした。するとひとりの裕福そうな客がレイの目にとまった。指示を与えたクローラーを送り出しているところであった。



はじめレイはクローラーに八つ当たりをする客ってこういう客だろうと思った。なぜなら混沌通りの店はどの店も無数の商品が置いてある。1店や2店だけで買い物をするなら商品を直接見て指差して買うことができる。しかし無限の数の全店から買うと

なると一定の時間内で直接見て回るなどできないのである。だからこそクローラーに指示を与えて買い物を代行してもらおうのだが雑然と陳列された商品をどんな指示で特定するというのだろう。クローラーにとっては宇宙石通りのように規格がきっちりした店の集まりでなければならないはずだ。で。結局あの客は働かないクローラーに八つ当たりする羽目になるに違いない。

レイはそんなふうに眺めていたのだった。しばらくしてクローラーは裕福そうな客のもとへ戻ってきた。ところがレイの予想に反してその客はクローラーから手渡された袋の中を見て大変満足そうな顔をしたのだ。そして支払い処理をはじめた。え？

どんな指示を与えれば買い物が遂行されるのか？

レイはその客に聞いてみたかったのだがもう集合時間が迫っていた。レイは後ろ髪を引かれる思いで混沌通りをあとにするのだった。

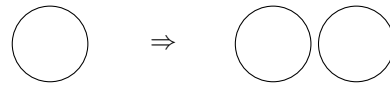
5

レイは惑星間通りのはずれにある駐船場へ急いだ。混沌通りに長居しすぎたせいで危うく集合時間に遅れるところだった。レイは宇宙船に滑り込み自分の席へ着いた。ああ。間に合ってよかった。すぐに発車時刻がきて宇宙船が駐船場を離れるとレイは今日買った品物を眺めはじめた。とくにクローラーに買ってもらった奇岩や宝石を見ると自然と笑みがこぼれるのだった。

そうだ。準備中の通りで面白そうなパズルを買ったんだっけ。レイはパズルをバッグから取り出した。‘複製球’という名前のパズルだ。ケースにはレイの手のひらにちょうど収まる大きさの完全な球体が1個入っていた。それとちょっと厚めの説明書も付属している。レイは説明書を手にとった。説明書によると球体をばらばらに分解して再度組み立てる

と球体が2個になると書いてあった。ていねいな図解までされている。

へえ。ちょっとやってみよう。レイは説明書にしたがって少々込み入った分解の仕方球体をばらばらにした。そして今度は説明書通りに組み立てはじめた。レイの予想では少し小ぶりの球体2個になるだろうと思ったが完成したのはなんと最初手にした球体と寸分変わらない球体が2個できたのだ。え？うそだろ？



レイは自分の目が信じられなかった。そうか。中は空洞なんだと考えたがそういうことではないらしい。どちらの球体もはじめの状態とまったく同じである。ならばもう一回ばらばらにして組み立てられるのではないかと思った。レイは早速1個の球体をさっきと同じ手順でばらばらにして組み立てた。するとまたもや同じ2個の球体になったのだ。だからいま同じ大きさの球体3個がレイの手にある。これすごいな。

レイはもっと続けたかったがそんなことをして自分の席を球体でいっぱいにしてはまずいと思い3個の球体はバッグにしまった。続きは家に帰ってからにしよう。レイは待ち遠しい思いを胸に帰路につくのだった。

★ゞ-----

選択公理

選択公理を簡単にいうと

いくつかの集合からひとつずつ代表元を選びそれらを元とする集合を作ることができる

というものだ。具体的には以下の集合

$$A = \{a, b, c, \dots, z\}^{(\text{アルファベット 26 字})}$$

$$B = \{\text{長方形, 台形, ひし形, 正方形}\}$$

$$C = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}^{(\text{整数})}$$

$$D = \{f(x) = x^2, f(x) = \sin x, f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x}}\}$$

からそれぞれ代表元を選び

$$X = \{m, \text{正方形}, -102, f(x) = \sin x\}$$

のような集合が作れる。当たり前のようであるが実はそうでもない。

集合自体が無限にある場合を考えよう。たとえば数直線から整数を取り除くと無数の開区間

$$\dots (-2, -1) (-1, 0) (0, 1) (1, 2) (2, 3) \dots$$

に分断される。この無限に分割されたそれぞれの区間から代表元を選んでひとつの集合にする例はたとえば

$$\{\dots, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, \dots\}$$

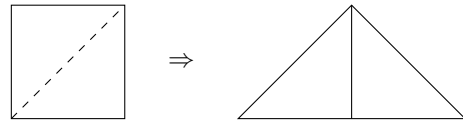
とすることである。つまりどの区間からも中点を代表元として選んだことになる。

しかし集合の数が無限にあると逐一集合の内容を見て選ぶことは無理なので何らかの規則を与える必要がある。いまの例は規則として各区間の中点を指定することができたがそのような規則は必ず存在するだろうか。ここが選択公理の肝となる。

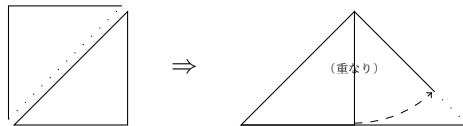
いろいろ雑多な集合があったときすべての集合に適用できる規則は果たして存在するのか。たとえば前述の集合 X を得るために A, B, C, D の元を直接見ずに何らかの規則で代表元を指定することを考えてみるとよい。‘(人には見つけれなくとも) 規則は存在する’ とするのが選択公理の立場である。‘規則は必ずしも存在するとはいえない’ とすれば選択公理は無効である。

現代の数学では選択公理を容認するようだがそれによってたとえば‘バナッハ-タルスキ^{*1}のパラドクス’のような現実的に矛盾する定理が証明される。もっとも数学はすべてが人の頭の中だけの思考の産物であるから現実的に矛盾しても論理的に整合していればよいのである。

バナッハ-タルスキのパラドクスが生じるのは選択公理だけでなく無限に関する性質も関わっている。たとえば正方形の用紙を対角線で切ったあと並べ替えて直角三角形にすることはできる。実際に紙を切って貼る行為で普通におこなえる。



しかし数学の目で厳密に見るとこれは少しおかしい。正方形を切るとき数学的に切断をすると半分に分かれた一方の辺上に点はない。



それで直角三角形に貼り合わせると今度はもと正方形の辺が重なる。そこで重なったうちのひとつの辺を斜辺へ移せば図形の中に重なりはなくなる。しかし足りない部分が残ってしまうのだ。

もし物理的に原子レベルでこのような作業が可能だとしても足りない部分を埋め合わせることはできない。ところが数学的には1の長さを $\sqrt{2}$ の長さにすればよいのだから単に移動するのではなく $x \rightarrow \sqrt{2}x$ として対応させればよいのである。バナッハ-タルスキのパラドクスではこのような考え

^{*1} ステファン・バナッハ (1892–1945) : ポーランドの数学者。アルフレート・タルスキ (1901–1983) : ポーランドおよびアメリカの数学者・論理学者。

もするので辻褄が合うのである。

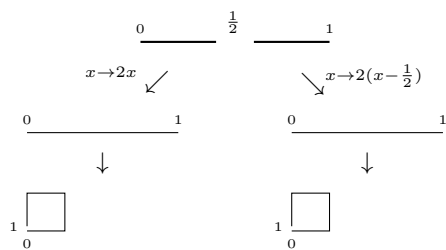
☆彡

[[レイの足あと]]

レイがはじめ準備中の 4 店から一個ずつの品物を買って袋に入れた行為は 4 個の有限集合からひとつずつ代表元を選んで集合を作るという選択公理そのものである。そのあとに準備を始めた 2 店はいずれも無限集合を示唆しているが集合自体の数は有限であるから代表元を直接選択できるので問題なかった。実際レイは服とアクセサリーを直接選んでいた。

ただ準備中のこの通りは‘選択公理通り’というわけではない。レイが買った複製球は選択公理製品だが店主が作っていたアクセサリーは違う製品だ。おそらく $[0, 1)$ の材料を $[0, \frac{1}{2})$ と $[\frac{1}{2}, 1)$ に分けて対応 $x \rightarrow 2x$ と対応 $x \rightarrow 2(x - \frac{1}{2})$ を用いて製品を作っていたのだろう。

この作業は物理的にも可能だ。たとえば



のようにすればよい。ただしこの場合は物理的に引き伸ばしているからアクセサリーの重量/密度は半分になってしまう。

しかしレイが見た店主は 1 個分の材料から重量/密度が変わらない製品を 2 個作っていたのだ。実際 $[0, \frac{1}{2})$ と $[0, 1)$ の濃度は変わらない。

レイが宇宙石通りで見た無限の数の商品を置く店

が無限の出店数である設定は前述の整数を取り除いた数直線に対応している。陳列台からはみ出さずより小さい/大きい商品が常に見つかる状況は开区間 (m, n) のことである。开区間であるから区間に m, n は含まれないのでいちばん小さい/大きい数はない。

なぜならたとえば $m + 0.1$ がいちばん小さいサイズと思っても $m + 0.05$ などのサイズが必ず見つかるからだ。店主が言うようにいちばん大きいサイズもない。たとえば $n - 0.1$ がいちばん大きいサイズと思っても $n - 0.05$ などのサイズが必ず見つけれられる。したがって陳列台からはみ出すことなくいくらでも大きいサイズを探すことはできるのだ。これらは开区間の性質である。

しかし开区間であっても中点は必ず求められる。だから無限の数の开区間であっても選択関数というべきものがある。この場合なら区間 (m, n) に対して $\frac{m+n}{2}$ を指定すればよい。

レイがクローラーに与えた指示はちょうど真ん中の大きさの石を買うことであった。ただ寓話の中では少し厳密さを欠いている。たとえば陳列台に置ける石の大きさが $(0, \sqrt{2})$ の範囲のものとする。しかし陳列台に置かれた石がすべて有理数サイズであったら $\frac{0+\sqrt{2}}{2}$ の大きさ—つまり無理数サイズ—の石は買えない。寓話は陳列台には実数サイズの石が連続の値として置かれている前提だったのである。

そのようなわけで任意の区間がうまい具合に設定されていないと区間内の一点を特定する選択関数があるかどうかは怪しい。しかし選択関数が存在すれば無限の数の集合から代表元を選ぶことができるのである。なぜなら選択関数があればひとつひとつの集合にアクセスする必要があるからである。

クローラーはこれを利用した。店を訪れることな

く無限の数のすべての店に選択関数を一齐送信したのだ。各店は選択関数にしたがい宅配転送システムで商品をクローラーのもとへ転送したのだった。最初クローラーが実際に店を巡っていたのは関数の正当性の確認であった。もしここで客が指示した選択関数に不備があればクローラーは働けない。買い物を中断して客のもとへ戻ることになる。

無限の数の店に一定時間で送信をしたり店が商品を一定時間で転送したりが可能なことは寓話: 銀河無限鉄道 2 で経験済みである。

したがって無限の数の買い物代金が有限で済む理屈も理解できるだろう。

レイが最後に見かけた裕福そうな客はどうやら雑多な集合のそれぞれから一点を特定する関数を見つけたようだ。いったいどんな指示をクローラーに与えたのだろう。金に糸目をつけなければ中央の値段という指示は可能だろうか？ レイは具体的な関数を見つけられなかった。もしかしたら裕福そうな客も具体的な関数を見つけてないかもしれない。

数学には‘あるもの’を特定できないが‘あるもの’が存在するという存在証明をすることがある。残念ながら選択公理は選択関数の存在を証明するものではない。だから定理ではなく公理なのだ。公理はそれを認めることで公理体系として正当化されるのである。

帰りの宇宙船でレイが遊んだパズルはバナッハ-タルスキの逆理である。実際レイがパズルでやったことが論理的に正しいと証明されるのだ。証明には無限からのシフトや選択公理が使われている。そのために一見矛盾することが起こる。レイは 1 個の球体をばらして 2 個の球体にしたが逆に 2 個の球体をばらして 1 個の球体に戻すこともできる。そのようなことが可能なのは一対一対応のまま長さを

$x \leftrightarrow \sqrt{2}x$ に変換できるからなのだ。

このように数学では当たり前の事実のために現実的に矛盾することが証明されたりする。背景には無限が隠れているものだ。もしかすると無限自体が矛盾を含んでいるのかもしれない。