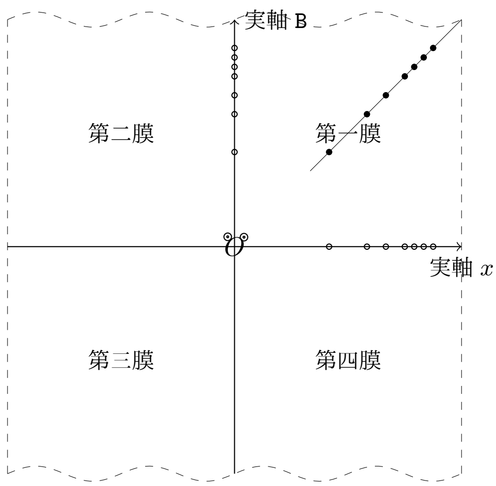
点影の落書き（‘複素平面’ の寓話）

1

アレフ零の弟コンプレクス・プレイン（レイン）は本当に真っ平に漂っていた。レイン自身の体は‘点影（てんえい）’ の遊び場でもあった。

レインは体の中央に一点の ‘目’ をもち目からは四方に ‘腕’ を無限の彼方まで伸ばしている。目は遠くからは ‘一つ目 O’ に見え近くに寄れば ‘双眼 $(0,\ 0)$’ に見えたものだ。腕は実質 2 本である。1 本はレインの目を中心にして左右方向に延びているので両腕のように見える。レインはこの腕を ‘実軸 x’ と呼んでいた。もう 1 本はこれもレインの目を中心に上下方向に延びて両腕のように見える。レインはこの腕をなぜか ‘実軸 B’ と呼んでいた。親に聞かされていたのかもしれない。軸と軸の間には ‘膜’ があり目・腕・膜の一体化したものがレインであった。

レインはあとで知ることになるのだが本当のところ実軸 B は ‘実軸 y’ とも ‘実軸 u’ とも呼ばれるらしい。だから親はあやふやな呼び名を伝えたのだろう。



今日もいくつかの点影がレインの平らな面に遊びに来た。それがわかるのは実軸 x と実軸 B に映る点影をひとつずつ見つけたからだ。軸上の点影は互いに協調して動いているように見えた。いま遊びに来た点影はレインの目から一定の同じ距離を保ちながらそれぞれ左右方向と上下方向へ移動している。その点影が協調して描く落書きが膜に残るのである。ちょうどいまは ‘第一膜’—つまり向かって右上の膜—の上にレインの目から右斜め上 45° の方向に走る落書きが一本の筋として認められた。

実軸 x 上と実軸 B 上を $+\infty$ 方向からやってきたふたつの点影は今度はレインの目の上を通って $-\infty$ 方向へ移動していった。点影が ‘第三膜’—つまり向かって左下の膜—に落書きを残しているときはレインの目から左斜め下 45° の方向に走る一本の筋として認められた。結果としてレインの膜には右上から左下に真っ直ぐに延びる直線が残った。軸上の点影は落書きを残して去っていったのである。でもレインはこの落書きを見るのが好きだった。

しばらくすると実軸 x の左側 $-\infty$ 方向に点影が見えた。点影はレインの目の方に一定の速度で向かってくる。するとそのだいぶあとから実軸 B の上側 $+\infty$ 方向にも点影が見えてやはりレインの目の方に向かってきた。はじめレインはさっきの点影が戻ってきて同じように軸の上を滑るものと思っていた。ところが実軸 x 上を動く点影の速さに比べ実軸 B 上を動く点影の速さが明らかに速い。このペースならきっと実軸 B 上の点影の方が先にレインの目を通過すると思えた。ところが目の数歩手前から実軸 B 上の点影の速度が落ちて結局ふたつの点影は同時にレインの目を通過していった。その後ふたつの点影はいまの様子を逆回しにしたような動きで無限の彼方へ去っていった。レインの膜には放物線が残された。レインは初めて見る落書きに大いに喜んだのだった。

2

それからもレインの膜にはいろいろな落書きが残された。そのたびにレインは新しい発見をすることができて毎日がとても満足のゆく日々を過ごしていたのである。

そんなある日レインの体の外から声が聞こえた。

「やあ。毎日が楽しそうだね」

「君は誰？」

「私は実軸 z さ」

「実軸 z？　実軸なら自分にもちゃんとあるよ。それにこの軸のお陰で膜が張れて楽しく過ごせているんだ。君には用がないと思うよ」

「そうかな？」

突然の闖入者はそう言うとレインの膜の裏側から表側へ向けて軸を伸ばしてきた。みるみるうちに軸はレインの目の中心から垂直に貫通した。するとレインがまとっていた膜が徐々に薄れて消えてしまった。レインは服を脱がされたみたいで少し恥ずかしく感じたのだった。闖入者はレインのそんな様子におかまいなしに言った。

「これが実軸 z さ。これを使うともっと楽しいものが見られるよ」

闖入者には少し腹が立ったがレインはもっと楽しいことが何なのか知りたかった。闖入者は待っていればわかると言って押し黙ってしまった。しばらくすると実軸 x と実軸 B と実軸 z の $-\infty$ 方向遠くに点影が見えた。みっつの点影は皆同じ速度でレインの目へ向かってくる。そして同時に目を通過して同じ速度で $+\infty$ の彼方へ去っていった。点影が描いた落書きはレインの裏側斜め下から表側斜め上へ突き抜ける傾斜 45° の直線であった。

「わあ。これすごい」

レインは興奮気味に言った。直線自体は見慣れたものであったがまさか直線が膜から飛び出すとは想像もしていなかったからだ。

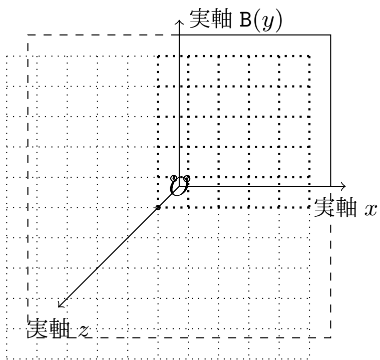
「どうだい？　気に入ったかな？」

闖入者はレインに問いかけた。レインが気に入った旨を伝えると闖入者は言った。

「では今日一日この場にいてあげよう。存分に楽しむといい」

レインは大喜びで闖入者に礼を告げた。

しばらくすると実軸 z 上に点影がひとつ現れた。それも突然レインの一歩手前に。レインが驚いていると実軸 x と実軸 B の上にも点影が現れふたつの点影がせわしなく動き始めた。実軸 z 上の点影は一歩手前でじっとしたままだ。あれ？　気絶しちゃったかな。レインの心配をよそにほかのふたつの点影は無秩序に軸上を動き回っている。うわー。そんなめちゃくちゃに動いたらせっかくの落書きが台無しになっちゃうよ。そう思ってもレインには点影の動きは制御できない。呆然と見ていたレインだったが点影が去ったあとの落書きを見てびっくりした。レインの一歩手前に真っ平な膜が一枚でき上がっていたからだ。



それからも点影は現れては消えることを繰り返した。そのたびにレインの目の前には空間を駆け巡る曲線や球面など様々な落書きが残されたのでレインは大興奮だった。あまり興奮したせいか疲れていつ

の間にか眠ってしまったようだ。レインが目を覚ましたときには実軸 z はいなくなっていた。レインの膜はもと通り実軸 x と実軸 B の間に張られている。夢だったのだろうか？　とレインは思った。

3

夢であっても空間に広がる曲線や曲面を見てしまったレインにとっていま見ている平面上の落書きは少し興醒めするものになっている。ああ。もう一度あの闖入者が来ないかなあなどと思い日々を過ごしていたのである。するとある日声が聞こえた。だがその声は以前の闖入者と違ってレインの体の中から発しているようだった。

『退屈しているようだね』

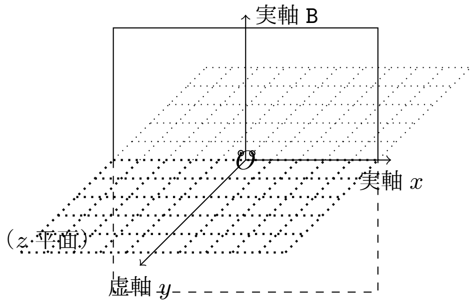
レインはこの前の闖入者がまた訪れたのかと思った。

『違うよ。でも誰でもいいさ。楽しいものを見せてあげよう』

こう言われてレインは少し不安になった。たしかにこの前の闖入者とは違うと感じられたからだ。明らかに声の出どころが違う。でも楽しいことと言われてレインは誘惑に勝てなかった。闖入者はレインの気持ちを察したのかすぐさま膜の裏側から表側へ向けて軸を伸ばしてきた。再び軸がレインの目の中心から垂直に貫通したのである。あれ？　やっぱりこの前の闖入者じゃないの？　レインは少し混乱してしまった。すると闖入者は言った。

『この軸は虚軸 y なんだ。本当は君がもともと持っている軸なんだよね。君が気づいてなかっただけで』

え？　自分にもともとあっただって？　どういうことだろう。親知らずみたいなものかな？　レインが考えていると実軸 x と虚軸 y によって張られる膜がくっきりと現れた。その代わりレインがまとっていた膜はまた消えていた。なんで？　このことでレインは虚軸 y は実軸 z ではないことを悟ったのである。



レインはなぜ軸に膜が張られたのか聞いてみたが返事はなかった。闖入者はすでにどこかへ行ってしまったようだ。仕方なくレインが待っていると点影が現れた。ところが妙なことに点影は軸上ではなく実軸 x と虚軸 y によってくっきり張られた膜（z 平面）の上に現れた。え？　そこは落書きが描かれる場所じゃないの？

点影が z 平面の上を動くのは驚きだったけれどレインはその結果どんな落書きができるのか大いに期待した。点影は最初レインの目の付近を小さく回っていたがやがて渦を巻きながら大きく回り始めた。点影が動いても膜上には跡が残らないけれどレインの記憶では渦巻きの軌跡がはっきりと見えるのだった。これは以前自分の実軸 x と実軸 B が張る膜に描かれたものである覚えがあった。

点影は渦巻きの半径を大きくしながら膜の遠く遠くへと去っていった。レインはさぞ楽しい落書きが残されるだろうと期待した。でも何も現れなかった。レインにはとんでもなく期待はずれな結果であった。

4

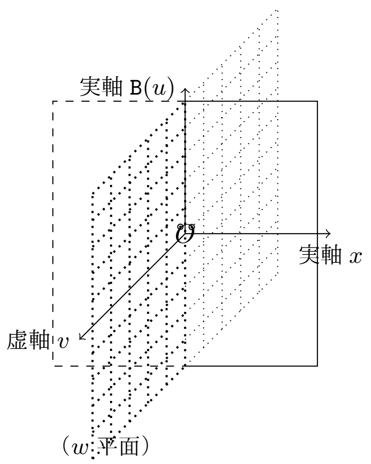
レインがしょんぼりしていると闖入者が戻ってきた。

『どうだい？　ちょっと変わってるだろう？』

変わってるどころかまったくの拍子抜けじゃないか。レインが腹立たしげな態度を見せると闖入者は続けた。

『まあまあ。あわてなさんな。虚軸 y を虚軸 v に交換しよう。この軸も君がもともと持っていたものだよ』

そう言って闖入者はまたどこかへ行ってしまった。ところが虚軸 y を虚軸 v に換えたことで今度は実軸 B と虚軸 v によって張られる膜がくっきりと現れた。え？　なんでそっち側に？



するとそのうちまた点影が現れた。点影はやはり実軸 B と虚軸 v によってくっきり張られた膜（w 平面）の上に現れたのだった。そしてさっきと同じように渦を巻いている。でも前より渦の間隔が広いように思えた。それに動きも速い。ただレインは冷静になっていたため w 平面で点影が動いている最中にときどき実軸 x に点影がぽっと映るのが見えた。実はこの前も実軸 B には点影が同じようにぽっと映っていたのだがレインは気づいていなかった。

実軸 x に映る点影を見ているうちにレインは渦を描いている点影と軸に映る点影には規則的な関係があることに気づいた。もしかしたら軸上の点影は本当は膜上を動いているのではないかと感じた。でも膜は一枚しかないので見えないのかもしれない。

『いいところに気づいたね』

急に闖入者の声が聞こえてレインはびっくりした。

「なんだ。点影はどっちも膜の上を動いてるんじゃないか。だったら一度に両方の膜を見せてくればいいのにさ。なにもったいぶってるの？」

『いや。もったいぶってるわけじゃない。ここでは見られないからそうしたまでさ』

「ここじゃ見られないってどういうこと？」

すると闖入者はレインに冒険をする気はあるかと聞いてきた。レインは冒険と聞いて目が輝いた。

「冒険？　それなら大歓迎だよ」

『そうかい。それじゃあ一段上がろうか』

レインには闖入者のいう意味がわからなかった。どういうことか考えているとレインは何かにつかまれたような感覚になり一瞬意識が飛んだのである。

5

意識を失くしていたのは短時間だったと思うのだが気がつくとレインは普段と様子が違うところにいた。自分の体にも違和感があった。それでよく見まわしてみて驚いた。レインの目の周りには 4 本の軸があったからだ。しかも 4 本が互いに垂直に交わっていたのだ。その上さっき見ていたふたつの膜も張られているのがわかった。

このときレインは闖入者がここじゃ見られないと言った意味がわかった。普段レインがいるところは三次元空間である。だから軸は 3 本までしか直交できない。いま 4 本の軸が直交しているということは少なくとも四次元以上の空間だ。闖入者は一段上がると言った。するとここは四次元空間？

『気分はどうだね？』

闖入者が聞いてきた。レインはあまりの状況変化に声を出せずにいたけれど顔は笑っていたようだ。

『どうやら大満足みたいだな。さっきの続きを見せてやろう』

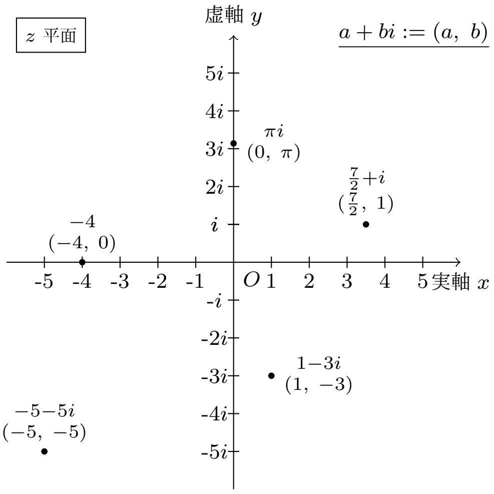
闖入者の声が消えてしばらくすると点影がふたつレインの目の周りを周り始めた。ひとつの点影は z 平面上をもうひとつの点影は w 平面上を周っている。この見え方は見慣れていないせいかレインの目も回ってしまいそうだ。z 平面上を周っている点影に比べ w 平面上を周っている点影の方が大きな半径で速く移動している。さっき別々に見ていたものを同時に見ているのだとわかった。そのまま見続けるとふたつの点影はそれぞれの膜の遠く遠くへ去っていった。

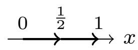
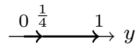
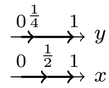
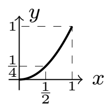
いったいどんな落書きが残されるのだろう。レインが期待していると目の前に息をのむほどの落書きが現れた。こんなのいままで見たことない。三次元空間では見ることが叶わない軌跡なので当然である。だからことばで表現しようもない。レインはただただ落書きの軌跡を見つめるだけであった。

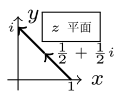
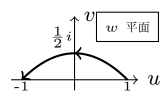
★彡

複素平面

$x^2=-1$ を満たす x のひとつを i で表し**虚数単位**という。すなわち $i^2=-1$。i の実数倍を表す bi は**純虚数**という。実数 a と合わせた $a+bi$ は単に**虚数**という。つまり虚数単位を含む数が虚数なのである。そして実数と虚数を合わせた数を**複素数**といい数学で扱う本来の数なのである。実数だけまたは純虚数だけなら数直線上に一点で示せるが $a\neq 0$ または $b\neq 0$ である複素数は無理である。そこで複素数を一点で示せるものが必要になる。それが**複素平面**である。$a+bi$ は複素平面上の座標 $(a,\ b)$ で示す。



実数は一本の数直線で示せるのでたとえば実数値関数 $y=x^2$ であれば x の変化  に対応する y の変化  を  のように並べて見てもよいが  のように直交させて表示できる。そしてこの方が x と y の変化の様子がよくわかる。

しかしたとえば複素関数 $w=z^2$ であれば z の変化  に対応する w の変化  を直交させて表示することはできない。なぜなら三次元空間では 4 本の軸を互いに直交させられないからである。直交させるなら四次元空間が必要だ。

> 先の図で z 平面の直線が w 平面で曲線になることは簡単に確認しておこう。
> z 平面の直線の方程式は $z=a+(1-a)i$ である。この点 z は z 平面座標では $(x,\ y)=(a,\ 1-a)$ に対応しているので x と y の関係は
> $$\overbrace{1-a}^{y}=1-\overbrace{a}^{x}$$
> となっている。たしかに $y=1-x$ の直線であることがわかる。

また w 平面上の点は $w=z^2$ より

$$w=\{\overbrace{a+(1-a)i}^{z}\}^2=(2a-1)+(2a-2a^2)i$$

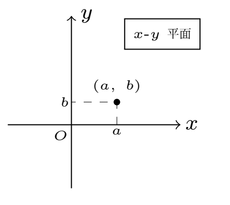
となる。この点 w は w 平面座標では $(u,\ v)=(2a-1,\ 2a-2a^2)$ に対応している。u と v の関係は u^2 と v の関係と見れば

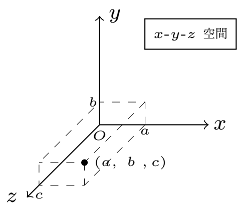
$$\overbrace{2a-2a^2}^{v}=\frac{1}{2}\{1-(\overbrace{2a-1}^{u})^2\}$$

と変形できるので $v=\dfrac{1}{2}(1-u^2)$ の放物線になることがわかる。

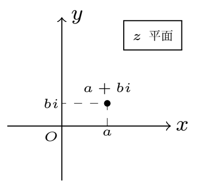
人は立体を平面に疑似的に描くことができるではないかと反論するかもしれない。しかしたとえ四次元立体を三次元空間に疑似的に ‘描く’ ことができても真の形を想像することは無理である。だから複素関数のグラフは z 平面と w 平面を並べて描くのがせいぜいなのである。

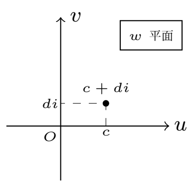
さて。寓話では軸の名称を混ぜていたのでここで整理しておこう。





中学校では実数値しか扱わないので座標は x-y 平面で表していた。高校で空間図形を扱うときは 3 番目の軸に z を用い座標は x-y-z 空間で表していた。





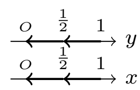
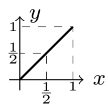
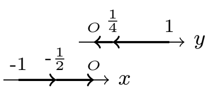
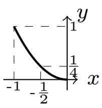
軸の名称が混ざる原因は複素平面に実軸 x と虚軸 y を使うからだ。そして両方合わせて z 平面という。この z 平面一枚で実座標の x 軸一本と同じ役割を果たす。だから実座標の y 軸の役割を果たすものはやはり複素平面となる。それが複素平面 w なのである。

x-y 座標の x 軸は z 平面の x 軸とまったく同じものである。それなら実座標で 2 番目の軸が必要になったら w 平面の u 軸を持ってくればよかったのだ。でもそうするとなんで x の次が y じゃなくて u なの？ ってなっちゃうか。

☆彡 _ _ -- --- ----- -------- ------------- ——————

[[レインの足あと]]

レインがはじめ楽しんでいた落書きは実数 x に対応する実数 y の変化を x-y 実座標平面へ投影したものである。レインは本当は複素平面 (complex plane) をもっているので ‘$x_{実}$-$y_{虚}$ 平面（z 平面）’ と ‘$u_{実}$-$v_{虚}$ 平面（w 平面）’ とを直交させているのだが虚軸は見えていない。それでいま見えているのは x 軸-u 軸なのだが x と y の変化を調べるので便宜上 x 軸-y 軸として使っているのである。実軸 B の名称はあとから名前を変えられるようにする親の配慮だったのだろう。

レインが最初に見た点影の動きは  であった。x, y ともに同じ速度でレインの目 O へ向かってきた。それで膜には  の落書きが残ったのである。次にレインが見た点影の動きは  であった。x は一定の速度であるが y は前半は速く後半は遅い。それで膜には  の落書きが残ったのである。

そのあと闖入者によって 1 本の軸が追加されたと

きはレインが x-y-z 実座標空間に‘昇華’したことになる。いまは便宜上 x 軸-y 軸として使っているので闖入者は 3 番目の軸を実軸 z と呼んだ。本来のレインは複素平面もちなので‘$r_{実}$-$s_{虚}$ 平面（t 平面）’とでもいうべき 3 番目の面から r 軸を便宜的に実軸 z として使っていることになる。

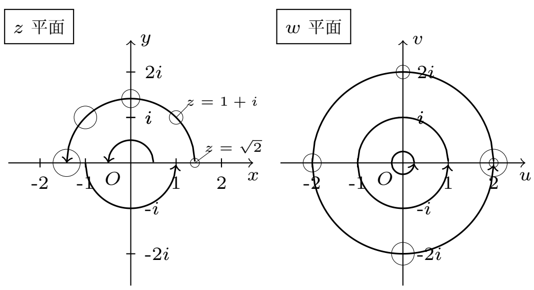
そして x, y, z の関係を点 $(x,\ y,\ z)$ としてグラフや図形で表すのである。そのときレインが目にした真っ平な膜は z の値が固定された上で x と y が自由に動いた結果である。具体的には常に $z = 1$ で $(x,\ y) =$ (任意の値, 任意の値) なので点影が無秩序に動いたすべての $(x,\ y)$ が $z = 1$ の高さに描かれたのだ。つまり平面が $z = 1$ の位置に浮いたようになったのである。

このあと新たな闖入者が来たことになっているが実はレインは本来複素平面を持っているのである。私たちは数といえば実数値だけを扱う。しかし本来の数は複素数であるから私たちは複素平面の実数軸しか見ていないのだ。このように考えると x-y 実座標平面は本来 z-w 複素座標空間の実数面しか見ていないことになる。だから四次元空間では‘完全な’z-w 複素座標空間を見られるはずである。

しかし無理をすれば三次元空間でも‘不完全な’z-w 複素座標空間なら見られる。z 平面に w 平面の実軸だけもしくは虚軸だけを直交させるとよい。ただ新たな闖入者が行ったのはこれとは少し違う。レインはすでに実軸 2 本を直交させているので闖入者は虚軸だけを通したのである。

闖入者がはじめ虚軸 y を通して新たな膜が張られた理由をレイは知りたかったようだ。膜が生じた理由は $\boxed{\text{複素平面}}$ で述べたとおりこの膜（z 平面）が x-y 座標の x 軸の役割を果たすからである。z 平面上を点影が動くことは x 軸上を点影が動くことと同じなのだ。レイがはじめまとっていた膜（x-y 平面）は点影が描いた落書きを見るための膜である。複素平面が直交した場合は落書きを見るところは四次元空間となる。だからはじめレイがまとっていた膜は用なしになったのだ。同じ理由で虚軸 y を虚軸 v に換えたことで w 平面が現れたのである。

実軸 x と虚軸 y をもつ平面が複素平面 z である。また実軸 u と虚軸 v をもつ平面が複素平面 w である。この 2 平面は三次元空間では直交させられないが並べて描くことはできる。すると z 平面の複素数に対応する w 平面の複素数を表示させられる。たとえば次の図は $w = z^2$ のグラフの一部である。そしてレインがくっきり張られた膜—z 平面と w 平面—で見た動きでもある。



関数 $w = z^2$ は z 平面の半円が w 平面の円に対応している。このことは z 平面の 1 周分は w 平面では 2 周分にあたることを意味する。大きさの異なる ○ を描き加えたので z 平面の複素数と w 平面の複素数の対応を比べるとよい—z 平面のいちばん外側の半円は半径 $\sqrt{2}$ である。

レインが z 平面に比べて w 平面の方が速く大きく動いていると感じたのはこの対応にあったのだ。ただし速く大きい状況は点影の原点 O からの距離が 1 以上離れているときである。O からの距離が 1 以内のときは z 平面に比べて w 平面の方が速く‘小さく’動く。

さて。z 平面の原点に w 平面の u 軸を垂直に通したとしても w 平面の虚数は表せない。v 軸がないからである。しかし u 軸上の値だけは読み取れる。つまり z 平面上で先の図に ○ を描き加えた点 $(\sqrt{2},\ 0)$, $(0,\ \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\ 0)$ に対応する u 軸上の点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$ だけは z 平面に通した u 軸上で見られるのである[*1]。しかしレインは最初これらの点を見落とした。

逆に w 平面に x 軸を通せば w 平面上の点 $(2,\ 0)$ に対応する x 軸上の点 $(\sqrt{2},\ 0)$, $(-\sqrt{2},\ 0)$ だけが見られる。そしてレインはこれらの点がぽっと映るのに気づいたのだった。

レインが見たのはこのような状況であった。だから平面上に線が描かれても空間内に落書きが残ることはなく軸上だけに点として現れたのである。しかしこの 2 平面を互いに直交させることができれば四次元空間に図形を見ることができるだろう。ちなみにその図形は点 $(a+bi,\ c+di)$ の軌跡として四次元空間に描かれている。レインはそれを見せてもらったのだ。

ただレインは長らく二次元平面でものを見ていたはずである。果たして三次元図形や四次元図形を正しく見ることができたかは定かでない。

[*1] $(0,\ \sqrt{2})$ は $z=\sqrt{2}\,i$ であり $z^2=-2$ なので $(-2,\ 0)$ に対応する。