如意棒の彼方（'ある数学パズル' のオマージュ）

アレフ零（レイ）はいま一直線に延びた棒の上をものすごい速さで移動し続けている。でも出発点からどこまで来たのかとっくの昔にわからなくなっていた。なにしろ棒は前にも後ろにもはるか彼方に延びて先端を認めることは叶わなかったからである。それに時間の感覚も無くしているに違いなかった。

1

気づいたときは棒の先端に立っていた。どこからともなく '声' が聞こえた—いや声のようなものを感じたのだ。'声' は直接レイの脳に届いた。

『不老不死を手に入れたいか』

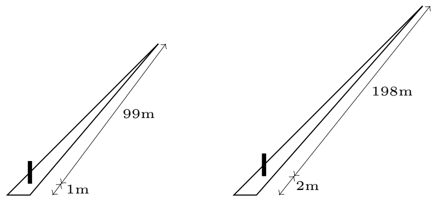
問われはしたがレイが戸惑っていると '声' は続けた。

『手に入れたければ棒の反対端まで来い』

レイは視線を棒の反対端へうつした。先端までちょうど 100m あると感じた。もしくは '声' にそう感じさせられたのかもしれない。

ちょっと逡巡したもののレイは意を決して歩くことにした。ひかえめに 1 歩 2 歩と歩を進めたときレイの足裏で棒がぷるっと震えるのがわかった。少し驚いて 3 歩目を踏み出すのを待って棒の反対端まで見渡した。

棒はきっちり 100m 伸びて先端は 200m 先になっていた。100% の伸びである。レイの 2 歩目が棒に触れた地点は端から 1m—反対端まで 99m—の位置であった。しかし棒は直後に '均質' に伸びた。このときのレイはまだ気づいてなかったが棒が伸びたあとはレイの後方が 2m で前方が 198m というのが正確な位置関係だった。レイの前後とも等しく 100% 伸びたのだ。



レイはゆっくりともう 1m 進んだ。そこは出発点から 3m—反対端まで 197m—の位置である。棒はぷるっと震えるとすぐさま 100m 伸びて全長は 300m になった。棒はレイが 1m 進むたびに 100m 伸びるようだ。しかし今度は 200m の棒が 300m に伸びたので 50% の伸びである。棒は均質に伸びるからレイの位置は出発点から 3m のはずが 4.5m のところになった。当然ながら反対端まで 197m のはずが 295.5m になっている。

おい。冗談じゃない。こっちが 1m 詰めるたびに反対端は 100m 遠ざかるのか。なるほど不老不死などうまい話があるはずもない。レイはしばらくその場に立ちつくして考え込んでしまった。

2

また '声' がした。

『やめるか？』

レイを試すような口ぶりである。'声' の出どころを探るため周囲を眺めたが人の気配はない。もっとも人が発した声だと断定できる根拠など何もなかったけれど。

遠くにオーロラのような揺らぎが見えた。'声' はあそこから届くのだろうか？　変な世界だ—いや世界なのか？　レイは '声' に抗うように歩き出した。歩くたびに棒が伸びてゆくのが見える。100m 歩いて当初の先端付近を通過したときは棒の長さが 10km になっていた。しかし見通しがよいせいか棒の先端が伸び続けているのはわかった。

この調子では逃げる棒の先端に到達することは無

理だろう。からかわれているに違いない。レイは歩くのをやめた。すると'声'がした。

『後ろを見てみろ』

レイは後ろを振り返った。出発点である棒の端は500m ほど後ろにあった。え？ 100m しか歩いてないはずだ。後ろも伸びたのか？ そうか。棒は一様に伸びるのだとレイは直感できた。だとすれば先端は. . . 。100m 歩いたから棒は 100m ずつ 100 回伸びたはずだ。すると棒はいま 10,000m の長さということになる。だいぶ長くなったな。

ところがレイはもしかしたら先端に到達できるのではないかと思い直した。棒が一様に伸びるなら後ろが長いほど前より後ろの伸びがまさるはずだ。いずれ後ろも相当な長さに伸びてくるだろう。先端まで 9.5km。もうちょっと歩いてみるか。

3

'声'はあれ以来途絶えている。レイが淡々と歩き続けているからだろう。それにしてもまったく疲れないのはなぜなのか？ 汗もかかない。レイはもしかすると自分はすでに生きていないのではと思った。魂だけがどこかをさまよっているみたいだった。これは無間地獄か？ 遠くに見えているオーロラの揺らぎは形や色を変えながらずっと漂っている。でもそこまでの距離が縮まることはなさそうだった。単調な世界だ。周辺に何かが見えるわけではない。ただ大気の流れを感じるだけだった。

レイの時間感覚で一時間ほど歩いただろうか。すでに前方の先端はかなり遠くまで伸びて一点に溶け込んでいる。後方の出発点は少し前まで先端がチラチラして見えたもののすでに動きはない。出発点もはるか後方になったのだろう。しかし足裏に伝わる振動はたしかに棒の伸びを知らせていた。

先端はどれほど遠くなっただろうか？ やはり反対端にたどり着くのは無理かもしれない。歩き続ける意思がくじけかけたとき'声'が割り込んできた。

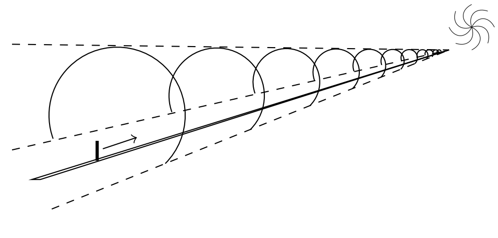
『お前はいま棒全体の 9% に達している』

一時間歩いて 9% ということか？ 棒が伸びる勢いの割には距離が稼げていると思えた。後ろも伸びているからだろう。だったら先端に到達できそうな気がして気持ちが少したかぶった。それにまったく息もきれていない。本当に一時間歩いたのか怪しくなってきた。そう考えるとレイはもはや時間の感覚を失っているとしか思えなかった。

疲れることがなければ走ってみてもいいんじゃないか。レイは小走りにかけはじめた。ただ棒の両端を確かめるのは無理なので棒全体の 9% がどれほどの位置かは感じられなかった。レイはちょっと昂揚したことをおかしく思い遠くに見えるオーロラの揺らぎを見ながら走り続けた。

4

走っても走ってもレイは疲れを感じなかった。そのため次第に走る速度が上がりいまや棒の上を滑っているような状態になった。遠くのオーロラは渦に巻かれるがごとく歪んで色はほぼ青だけになっている。



ふと後方に目を向けると大気が赤く染まって見えた。レイは朝焼けを背に如意棒の上を西へ向かう自分の姿を想像して悦に入った。そして悟空よろしくもっと速くと念じた。すると前方の視界が徐々に狭くなり棒の先に光のグラデーションが現れた。長い

トンネルの向こうから明かりが差し込んでいるふうにも見える。しかしこれ以上速度を上げるのは怖かったので状態を保ったまま滑るに任せることにしたのである。

しばらく時が過ぎたころにまた '声' が割り込んできた。

『お前はいま棒全体の 29% に達している』

どれくらい時間が経ったのだろう。それによって 'もう'29% なのか 'まだ'29% なのかが変わってくる。すぐにレイの疑問を晴らすべく '声' がした。

『時間ではない。進んだ距離にしか価値はない』

レイには '声' が意味することがよく理解できなかった。かかった時間は考えなくてよいということか？　時間が無関係なことが疲れないことに関連しているのか？　または時間などはじめから一秒も経過してなかったということか？　それでいて時間の経過を感じるのはなぜだ？　レイは混乱するばかりであった。

しかし 29% という事実はレイを落ち着かせた。レイは自分の進む 1m が棒の伸びる 100m に対応することから自分がどれだけ移動すれば先端にたどり着くかを考えはじめた。体はもうレイが意識しなくとも彼方の光に向けてとてつもない速さで進んでいた。

5

'声' はすべてを把握していた。レイが最初の 1m を進んだとき棒全体の長さの 1/100 を走破したこと。次の 1m を進んだとき棒全体の 1/200 を走破したこと。つまりこのとき出発点から 3m という位置は—直後に棒が伸びて 4.5m の位置になるのだが—棒全体の $(1/100+1/200)$ を走破したことを意味している. . . などだ。

'声' が最初レイの思考に割り込んだときはレイが自分の足で 5km 歩いたころだ。このときレイがいた場所は出発点から 45km 離れた地点で棒の長さは 500km になっていた。だからレイがたしかに棒全体の 9% のところにいることも '声' にはわかっていた。

棒の長さが 500km のときレイが棒全体の 9% を走破したことは $(1/100+1/200+1/300+\cdots+1/500000)$ の合計が 0.09 になったことを意味する。さらに棒の反対端に到達することは棒の端から端まで走破することだから $(1/100+1/200+1/300+\cdots+1/n)$ の合計が一になるまで加算することを意味する。

レイが長いトンネルにいるふうに感じたときはレイの移動速度が光速に近くなったのだと '声' にはわかった。さらにいまのレイには時間が意味をなさないこともわかっていた。しかしレイは未だに時間を意識しているようだった。そこで '声' は再びレイの思考に割り込むことにした。

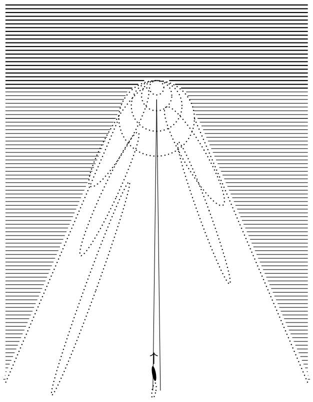
このとき棒の長さは 3,000 億 km を超えていた。したがってレイ自身は 30 億キロメートル超を移動したのだ。光の速さで 3 時間ほどの距離である。'声' はレイが棒全体の 29% に達していることを告げた。

棒の反対端にたどり着くにはあとどれだけの距離を移動しなければならないのだろう？　そもそもレイが走破する棒の割合の合計は 1 に達するのか？　もし達しなければレイは永久に反対端にたどり着けないことになる。どちらであるか '声' には自明のことであった。しかしレイには自明のことではなかった。'声' はレイがどう考えどう行動するか待った。

6

いまもレイは棒の上を滑り続けている。とてつもない速さであるがレイは速度を感じていない。もう時間の感覚がないのだ。時間を感じなければ速度は無意味になる。それでもレイにはこの状態が'いつまで'続くのかという認識はあった。しかしそもそも体はあるのか？　意識だけになっていないか？

そう考えると歩きはじめたころも本当に歩いていたか疑わしく思えた。



いまが不老不死なのだろうか？　だとしたら誰がこんなものを欲しがるのか。レイの視界は相変わらずトンネルにいるふうでずっと先に光のグラデーションが見えるだけだ。果たして棒の先端は. . . 。そうだ。さっき考えていたんだっけ。でもややこしくなってきたから考えを中断したことを思い出した。しかしもう続きを考える気は失せていた。レイにはそんなことはどうでもよくなっていたからだ。

やがて棒の長さは 1 兆 km に迫った。ただ棒が伸びるほどレイが走破する割合は小さくなる。実際このときレイが進む 1m は棒全体の 1,000 兆分の 1 にすぎない。したがって走破した合計が増える勢いも減衰し続けている。レイは時間の経過も体の感覚も無くしてはるか彼方の光に向かって棒の上を突進するだけであった。'声' は沈黙したままだ。レイはいまの状況を把握しきれていない. . . 。

★彡

ある数学パズル

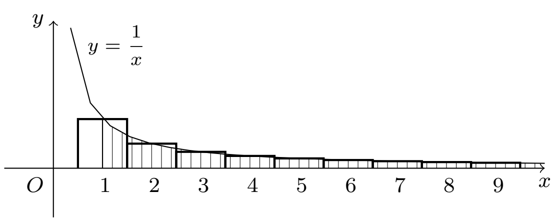
Q. 長さ 10m(:= 1,000cm) の棒の端に一匹の虫がいて棒の反対端へ向かっている。虫が 1cm 進むたびに棒は一様に 10m 伸びる。虫は反対端へたどり着けるだろうか。

A. 虫の最初の 1cm は棒の長さの 1/1000 に相当する。次に棒は 20m に伸びているので虫の 1cm は棒の長さの 1/2000 にあたる。以下虫は棒の長さの 1/3000, 1/4000, . . . を加算してゆく。したがって $1/1000 + 1/2000 + 1/3000 + \cdots$ が 1 になるまで進み続ける必要がある。$1/1000 + 1/2000 + 1/3000 + \cdots = 1/1000 \times (1 + 1/2 + 1/3 + \cdots)$ であるが**調和級数** $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n + \cdots$ は ∞ に発散するから途中で 1000 を超える。よって虫は棒の反対端へたどり着ける。

* * *

パズルは虫が反対端へたどり着けるかを問うものなので上の解でよいのだが 'いつ' たどり着くかということにも触れておこう。

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots$ は幅が 1 で高さがそれぞれ $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ の長方形の面積の和になっている。



そこで長方形を x-y 座標に描いてみると長方形の面積和は $y = \dfrac{1}{x}$ が x 軸と囲む面積で大雑把に近似

できることがわかる。近似は $x=1$ から先の影をつけた部分の面積でしている。すなわち

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\log n$$

である。しかし図からは $x=1$ の左に面積 $\frac{1}{2}$ の長方形が加算されていないし右上かどの少しの面積も含まれていない。正確な関係式は

$$\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\log n+\gamma}$$

であることが知られている。式は $n<\infty$ では近似式であるが $n\to\infty$ で等式となる。γ はオイラー*1の定数と呼ばれ $\gamma=0.5772156649\cdots$ という値だ。

> $y=f(x)$ のグラフが x 軸と囲む図形の面積を求めるには**積分**の知識がいる。詳しく述べないがたいてい公式を用いて計算する。$\frac{1}{x}$ の積分公式は $\int\frac{1}{x}\,dx=\log x$ なので**対数**の知識も必要だ。ここでは $x=1$ から $x=n$ までの積分だったので
>
> $$\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\log x\Big|_1^n=\log n-\log 1=\log n$$
>
> となったのである。

したがって $\log n+\gamma>1000$ を満たす n が求めるものとなる。$\gamma\approx0.577$ として $\log n>999.423$ を解けば

$$n>e^{999.423}\quad\text{だが}\quad e^{999.423}\approx1.12\times10^{434}$$

と換算できる。結局虫自身は 1.12×10^{434}cm 進んだのだ。棒はその 1,000 倍の長さになっている。

> 対数についてもわずかばかりの補足を加えておこう。**対数関数**は主に $\log_e$ を用いて $_e$ は省略することが多い。e は**寓話: 幽体疑数旅行**でも登場した**自然対数の底**である。
>
> **対数方程式** $\log x=p$ は $x=e^p$ と解ける。したがってこのあとを見越して
>
> $$\boxed{\log n+\gamma=p\quad\text{の解は}\quad n=e^{p-\gamma}}$$
>
> と公式化しておこう。$e^{999.423}$ などの値は数値計算ができるアプリを使うのがよいだろう。
>
> 対数はほかに**常用対数** $\log_{10}$ がよく用いられこれも $_{10}$ を省略することが多い。すると log だけではどちらの省略かわからない場合があるので $\log_e x$ を $\ln x$ と記述することがある。

いま求めた距離 1.12×10^{434}cm を光速（9.46×10^{17}cm/年）で割ると 5.38×10^{416} 年となる。光速で進んでもそれだけの年数がかかる距離ということだ。宇宙の寿命が 3.33×10^{10} 年ほどと推測されているので宇宙が 1.62×10^{406} 回もの回数 '誕生 → 終焉' を繰り返す計算である。とんでもない話だ。

寓話: 銀河無限鉄道では巨大数の単位に触れた。正式には無量大数が最大単位だが仏典がらみで不可説不可説転という単位まであるという。それによると 10^{224} := 阿伽羅（あから）と次に 10^{448} := 最勝（さいしょう）という名の単位がある。仏典の命数法は 10^4 ごとではなく桁が大きく飛んでいるので 1.62×10^{406} は単位をつけてどのように読むのだろう。桁の名称は $10^{7\times2^n}$ ごとに新しくなるようなので

$$1.62\times10^{406}=1.62\times10^{14}\times10^{56}\times10^{112}\times10^{224}$$

と分解した上で 10^{14} := 阿庾多（あゆた）と 10^{56} := 頻波羅（びんばら）と 10^{112} := 矜羯羅（こんがら）を合わせて

一．六二 阿庾多 頻波羅 矜羯羅 阿伽羅

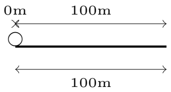
とでも読めばよいのだろうか。こっちの方がよっぽどとんでもない話だ。

*1 レオンハルト・オイラー (1707–1783) : スイスの数学者・理論物理学者・天文学者。

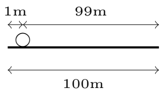
☆彡 _ _ -- --- ----- -------- ------------- ——————

[[レイの足あと]]

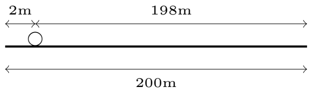
$\boxed{\text{ある数学パズル}}$では棒の伸びる長さに対して虫の進む距離は 1000 : 1 だったがレイが歩いた棒では 100 : 1 であった。はじめの状態は



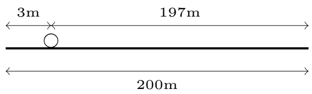
である。レイが 1m 進んで足が棒に触れた瞬間は



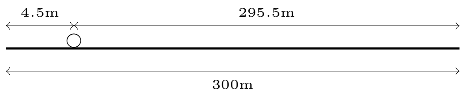
であるが棒は直後に 100m 伸びたのである。ただ伸びの 100m は棒全体から見て 100% の伸びになる。100% の伸びをレイの立場で見ると後ろも前も 100% 伸びるので



となるのである。次にレイが 1m 進んで足が棒に触れた瞬間は



であるが棒は直後に 100m 伸びたのである。この伸びは棒から見て—もちろんレイから見ても—50% だからレイの後ろも前も 50% 伸びて



となるのである。この時点でレイは棒 1 に対して

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{200}=\frac{3}{200}$$

を走破したことになる。棒の長さは 300m だから $300\times\dfrac{3}{200}=4.5$m で正しいことが確認できる。この時点ではレイはまだ次の一歩を踏み出していない。したがってレイが走破したのは $\dfrac{1}{200}$ までであることに注意しよう。

'声' に後ろを見るよう言われたときレイは 100 回歩みを進めていた。つまり棒 1 に対して

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\cdots+\frac{1}{10000}=\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{100}\right)$$

だけ走破したことになる。この値は調和級数と log の関係式より $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{100}\approx\log 100+\gamma$ と見て $\gamma\approx 0.577$ で計算すると

$$\frac{1}{100}(\log 100+0.577)\approx 0.0518$$

である。棒 1 に対して 5.18% だ。このとき棒の長さは 10,000m だったからレイは 518m の位置だったことになる。寓話ではレイの位置は 500m ほどであったから計算は正しいことがわかる。

続いてレイが少しくじけかけたとき '声' が割り込んできた。このときは棒全体の 9% だったので

$$\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=0.09$$

を満たす n を求めてみよう。調和級数と log の関係式および方程式の解を公式化した式を用いて

$$\frac{1}{100}(\log n+\gamma)\approx 0.09 \quad \text{より} \quad n\approx e^{9-0.577}$$

となるので $n\approx 4550$ がわかる。レイは自分の足で 4.6km ほど歩いたところであった。寓話では 5km ほど歩いていたころだったので実際は棒全体の 9.1% ほどのところにいたのだろう。

その後レイは速度を上げて光速の半分ほどの速さになった。それは前方の景色が青色に寄り後方の景色が赤色に寄ったことでわかる。光の波長が前方で短く後方で長くなったためだが並の速さではそうはならない。さらに速度が光速に近づくことで前方の視界が狭まる。この辺りでレイはトンネルふうの景色に怖気づいたようだがもしこれ以上速度を上げたらレイはどうなったのだろう？

レイがトンネルで '声' を聞いたころは棒の長さ

が 3,000 億 km $= 3\times 10^{14}$m であったからレイの歩みは 3×10^{12}m である。これは棒 1 に対して

$$\frac{1}{100}\log(3\times 10^{12}) \approx 0.287$$

なのでたしかに'声'が言う 29% のところまで来ていたのだ。

またレイが進んだ距離を光速（3.0×10^8m/秒）で割ると

$$3\times 10^{12} \div (3.0\times 10^8) \approx 1\times 10^4 \text{ 秒}$$

なので 3 時間弱である。太陽–天王星間ほどの距離だ。

その後棒は 1 兆 km の長さになった。このときレイの 1m は棒全体の 0.0000000000001% でしかない。29% にこの程度を加え続けて100% に達するのは絶望的に先のことである。

では $\dfrac{1}{100}(\log n+\gamma)=1$ になる絶望的に先の n はいくつだろうか？　それは公式化した式より

$$n \approx e^{100-0.577} = 1.51\times 10^{43}$$

である。レイ自身は 1.51×10^{43}m 移動する必要がある。棒はその 100 倍の長さだ。レイが光速（9.46×10^{15}m/年）で進んでも

$$1.51\times 10^{43} \div (9.46\times 10^{15}) \approx 1.60\times 10^{27}\text{年}$$

かかる計算だ。これでも宇宙の推定寿命をはるかに凌駕する。反対端まで行くには結局レイが不老不死でなければならない。寓話は本末転倒のような落ちなのだ。

ちなみにはじめが 10m の棒だったら

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{10n}=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

が 1 になればよいので $\dfrac{1}{10}(\log n+\gamma)=1$ になる n を求めたい。すると公式化した式より

$$n \approx e^{10-0.577} = 12{,}370\text{m}$$

と解ける。これはレイ自身が進む距離だ。そのとき棒の長さは 10 倍の約 124km になっているのでそこそこ現実的な話ではある。

> 実際に $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} > 10$ となる n を Python による計算で求めると $n=12368$ であった。ところで 12,000 項以上を加算してようやく 10 を超えるのは調和級数の増加速度がいかに遅いかを物語っている。