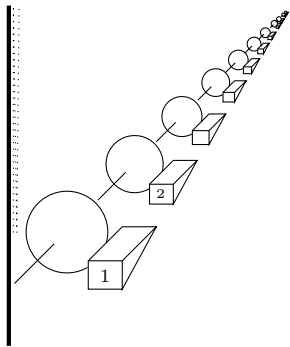


銀河無限鉄道（‘無限ホテル’のオマージュ）

1

宇宙には風変わりな鉄道があるものだ。アレフ零（レイ）はプラットフォームに立って彼方へ真っ直ぐに延びる球体の‘点列’を眺めていた。点列を貫く光線のようなものが確認できる。光線は‘線路’だろうか。その線路が貫いて見える黒く輝く球体は等間隔に整然と並び点列となってはるか彼方まで続いていた。黒い球体は‘車両’だろうか。この眺めは漆黒の空間に浮かぶ数直線を思い起こさせた。

レイが立っているのは1番ホームであった。ここは始発ホームである。各プラットフォームはそれぞれ数百メートルずつ離れておりすべてのホームには黒い球体が停車している。しかもどのプラットフォームも球体一両分の長さしかない小ぢんまりしたものであった。ただ1番ホームだけは違った。1番ホームの車両のすぐ背後には上へ高くそびえる柱が立っていて球体を留めている。柱は淡い光を発生し線路上の黒い球体の列とプラットフォームを遠くどこまでも照らしているように見えた。



見てくれが人ではない一体の客がどこからか姿を現した。乗客だろうか。乗客は車両の前に待機しているサービスパーサーに近づいた。パーサーが乗客に気づき声をかけた。

「こんにちは。グウソスウ様。今日もご一体でお出かけですか？」

「もちろんさ。私には仲間などいないからね」

乗客は上機嫌に答えると車両の扉へ向かった。すると球体の中に明かりが灯り黒い外観は透明になった。乗客が柔らかな光を受けて車内に収まる様子が車両の外からもはっきりわかる。

しばらくすると発車の合図があって白く光る車両はゆっくりと発進してゆく。車両はただちに加速すると2番ホームに停車中の黒い球体に急接近した。すわ衝突かとレイが思った瞬間2番ホームの黒い球体は弾かれて白く光る車両の上を乗り越え1番ホームへ滑るように収まった。レイには車両どうしが反発しあって一本の線路上で‘すれ違った’ように見えた。

客を乗せた白く光る車両は間髪を入れず3番ホームに停車中の黒い球体にも急接近したがさっき同様黒い球体が弾かれて2番ホームへ滑るように収まった。1番ホームから発車した車両はその後も白い光を放ちつつ次々とプラットフォームに停車している黒い球体を後ろへ弾いてゆく。ここ1番ホームからは白い点が直線上の黒い点をかき分けながら進んでゆくように見えた。すごいスピードだ。しかしその様子は彼方の闇に次第に溶けるようにしてやがて見えなくなった。遠くへ延びる線路上には黒い球体だけが何事もなかったように整然と並んでいた。

2

しばらくして5体のグループ客がやってきた。この乗客たちもどこから来たのかレイが気づいたときにはすでに1番ホーム上にいた。いったいどこから来るのだろうか。レイが不思議に思いながらグループを見ていると一体がパーサーに話しかけた。さっきの乗客と異なり話が長引いている。少し揉め

ているようだ。

「どうしても皆一緒には乗れんのか」

グループの代表らしき一体が諦めたように言った。どうやら車両はどれも‘一体乗り’らしかった。

「申し訳ございません。セイタメンタイ族の皆様のご希望に添えなくて」

実際はセイタメンタイ族なら皆でひとつの球体に収まることができるのだがやむなくパーサーの指示にしたがったのである。一行は残念そうにめいめい1番ホームから5番ホームへ分かれていった。レイが見ているといつの間にか皆が各ホームへ移動していた。いったいどこを通過して移動したのだろうか？

レイは目を凝らしてホームの隅々を見たけれどよくわからなかった。

5体の客はホームの車両にそれぞれ乗り込んだ。客が乗り込むと室内に明かりが灯り車両は透明になった。各ホームの間隔は数百メートルほどだがここからでも思いのほか車内の様子がわかるものだ。室内が丸見えになるのはレイには好ましいと思えなかったが鉄道を利用する乗客は気にするふうでもない。

グループ客が車両に収まってしばらくすると発車の合図があった。5両編成の列車はゆっくりと動き始めた。列車は6番ホームに停車している黒い球体がけて加速してゆく。すると予想にたがわず6番ホームの黒い球体は5両編成の列車の上を一足飛びに乗り越え1番ホームへ弾かれていった。直後に7番ホームの黒い球体も弾かれ2番ホームへ。8番ホームの黒い球体も3番ホームへ。次々と滑るように収まってゆく。

5両編成の列車は次第に速度を上げて猛スピードで線路を進んでいった。1番ホームから見る光景は白く光る5個の点列が線分となって直線上の黒い点

をかき分けながら進んでいるように見えた。やがて列車が放つ光の線分は揺らぐ点となって彼方の闇へ消えた。目の前のプラットフォームにはまた以前と変わらぬ状態で黒く光る球体が規則正しく横たわるだけだった。

3

列車はどこまでゆくのだろうか？ レイは自分も列車に乗って遠くへ足を延ばしてみたいものだと思った。そこでパーサーに近寄り列車はどこ行きなのか尋ねた。回答は簡潔であった。

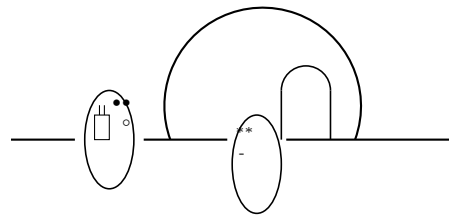
「彼方行きです」

「彼方？ それはいったい…」

レイが言いかけたときパーサーの通信機に着信があった。パーサーが何か話している。通信機から「ユウリスウ商事ご一行」ということばが聞こえた。パーサーは通信機を一旦体から離すとレイに聞いてきた。

「乗りますか？」

レイはどこに行っても戻ればよいだけだと考え乗る意思を示した。するとパーサーは再び通信機に向かって短い会話をして通信を終えた。それからパーサーはレイに向き直った。



「いまから無限の数の乗客が来るそうです。乗車に普段より時間がかかりますので発車まで少しお待ちください」

パーサーはレイを車内へうながした。レイが扉に近づくと車内に明かりが灯る。車内に入るとどんな体型にも適合する大きな席がひとつ設置されてい

た。ほかには連絡用の通話機が一台あるぐらいで調度品などは見当たらない。球体を貫くように見えた光線も車内を貫通してはいなかった。それとも車内の明かりにかき消されているのだろうか。いずれにせよ車両が光線を軸にして進んで見えるのは奇妙であった。

やはり車内からも外はばか見えである。だから車両の後ろに高くそびえる柱もはっきり見える。威圧感はないがどこまで高いのかと思うほど上までそびえて先端は見えない。柱はほのかに光を発して線路上の車両とプラットホームを照らしていた。光はどこまで届くのだろうか？ まさか彼方まで届くわけでもあるまいとレイは思った。

レイは席に収まると前方を眺めた。しばらくすると3番ホームの車内に明かりが灯り一体の客が乗り込むのが見えた。パーサーの言う無限の数の乗客の一体だろう。すぐさま5番ホームの車両にも客が乗り込んだ。そして7番から先も奇数番号のホームに停車している車両に続々と客が乗り込んでゆく。その後あつという間に光の点列が彼方へ向かってひとつ飛ばしで延びてゆくのが見える。どれだけの乗客がいるのだろうか？ ユウリスウ商事といえば無数の各部門それぞれに無数の社員が在籍する超巨大商社である。そんな一行が奇数番号だけの車両にどうやって収まるのかレイには謎だった。

やがて光の点列が遠くまで延びてゆく様子が認められなくなった。客は全員が乗り込めたようだ。しかし無限の数の客が一定の時間内に乗り終えるものだろうか？ レイが考えていると発車の合図があった。レイの乗った車両はゆっくり動き出しスムーズに加速し始めた。目の前に2番ホームの黒い球体が迫ってくる。ぶつかることはないと思ってもさすがに緊張して身構えてしまう。だが前に見たと

おり黒い球体は難なく弾かれ1番ホームへ滑り込んだ。ほっとしたのも束の間3番ホームの客を乗せた車両へ向かっている。しかしこの車両はすでに動きはじめていたようでレイの乗った車両と一定の間隔を保ちながら4番ホームの黒い球体がめがけて突き進んだ。

弾かれた4番ホームの黒い球体がレイの後方で2番ホームへ収まるのが見えた。直後に6番ホームの黒い球体は3番ホームへ。8番ホームの黒い球体は4番ホームへ。次々と収まってゆく。偶数番号のホームに停車していた黒い球体は空気ができたホームに順次収まるのである。同時に列車は客を乗せた車両を先頭に連結しながら猛スピードで彼方へ向かっていった。進むたびに白く光る列が徐々に延びてゆく。そのたびに列車の先頭が弾く黒い球体がレイの乗る最後尾の車両の上を滑って後ろへと収まっていった。壮観な眺めはずっと続いた。

4

一息つくくとレイは列車から見えるプラットホームの番号を確認しようと思った。ホームの数字は一気に京（けい）・垓（がい）・敬（じょ）と桁を飛ばしてゆく。その後も無量大数（むりょうたいすう）を超え俱胝（くてい）... 薜羅（べいら）... 不可説不可説転（ふかせつふかせつてん）を超えた。もう桁の呼び名はない。ゆうに‘2の1000乗桁’を超えてしまった。

どれくらい遠くまで来たのだろうか。列車はいつ目的地へ着くのか？ 待てよ。レイはふと気になった。終点などあるのだろうか？ レイは1番ホームでの様子を思い出していた。そういえば1番ホームは列車が発発するだけで到着する列車はなかった。なぜそのことに気づかなかったのか。現在列車

が通過しているプラットホームの番号はというと...桁が大きすぎて数字の末尾を確認することさえできない。まじか。

始発ホームからはどれほど離れたのだろうか？
レイは何気なく肩越しに後方を振り返った。ホームにそびえていた柱はさぞ遠くに見えるだろうと思った。いや見えなくなっているかもしれない。しかしレイは自分の目を疑った。柱はすぐ後ろに高くそびえていたのだ。まさか柱まで移動しているのか？

そんなはずはない。レイの乗る車両と柱までの間には黒い球体が無数に見える。でも柱もすぐ近くに見えるのだ。レイは自分の距離感覚がおかしくなっていることに気づいた。どうやら線路上では距離がプラットホーム上とは違うようだ。線路上は時空が歪んでいるのかもしれない。

いまの時点でレイが乗った列車はおそろしく長い編成になっているだろう。そして長くなった列車の先頭のなお先にはプラットホームに待機している黒い球体がずらーっと並んで弾かれるのを待っているはずだ。もちろん黒い球体の間にはひとつ飛ばしで白く光る球体がある。ユウリスウ商事の乗客の車両だ。列車は白い車両を連結し黒い球体を弾いてどこまでも進み続ける。

5

しばらく車外に気が向いていたレイだが車内に通話機があることを思い出した。そうだ。これで降りられるかもしれない。レイは通話機のスイッチを入れた。すると通話機の画面にフロントパーサーが現れた。レイはすぐパーサーに話しかけた。

「途中で降りることはできますか？」

「もちろんです」

レイはほっとしたがパーサーに何番ホームに降りるかと聞かれて口ごもってしまった。何番？ そ

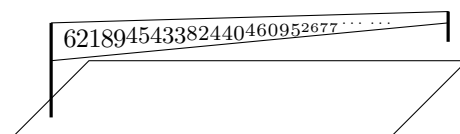
もそもいまどこ？

「いや。もうどこでもいいから降ろしてくれ」

「承知しました。では降りる準備をして...準備が整いましたら通話機のスイッチを切ってください。そこで停車します」

降りる準備といってもレイは何もすることがない。そこでパーサーにひとこと礼を述べて通話機のスイッチを切った。すると外に見えるプラットホームの流れが緩くなりホームがはっきり見えたところでレイの乗った車両だけが止まった。その際に歪んでいた時空がもとに戻ったのかすぐ背後に見えた柱はすーっと後方に下がり少しだけ離れて止まった。柱までは黒い球体がびっしり詰まって見える。目の前ではレイの車両を切り離れた列車が遠ざかってゆく。レイの車両の前に空いた隙間には前方から弾かれてきた黒い球体がすかさず収まっていった。

ふう。レイが車両の外へ出てホームへ降りると車内の明かりが徐々に薄れてゆき車体は真っ黒になった。さて。ここはどこだろう？ パーサーはいないのか。プラットホームに表示された番号は遠くまで数字が連なり読めたものではない。



レイはここではたと気がついた。さっきパーサーは何番ホームに降りるか聞いてきた。あのとき1番ホームと答えていたらもとに戻れたのではないだろうか？ しかしあとの祭りであった。ホームには何かの影どころかべんべん草すら生えていない。高くそびえる柱から発せられた光だけが何もないホームと黒い球体の列を照らしていた。柱が少し遠くに見えることでレイは辺境に來たことを実感した。

後悔しきりのレイだったがふと1番ホームで見た

光景を思い出した。そういえば乗客はプラットホームからプラットホームへと移動していたじゃないか。何か移動の手段があるはずだ。しかしプラットホームは空間に浮いているだけでどこかに出入り口のようなものは見つからない。そうこうするうちレイはユウリスウ商事ご一行のことを思い出した。無限の数の客がレイのあとからあとから乗ってきたのだ。あのときは無限の客が全員車両に乗り込んだはずだ。待っていればいずれこのホームにも乗客が現れるに違いない。移動手段がわかるかもしれないと思うとレイの気持ちは少しだけ晴れた。

6

レイは長い時間待った。その間何度も光の列が通過していったがこのホームで乗客が降りることも乗ることもなかった。列車はすべて短い編成だったからだ。さらに時間が経ったとき遠くからひとつ飛ばしで白い光がこちらに向かってくる様子がレイの目にとまった。もしや無限の数の客が乗車している最中ではと思い期待が膨らんだ。そのうちの一体がこのホームにも現れるはずだ。どこに現れるだろう？

レイが自分のいるプラットホームを見回していると手前のホームの車両が白く光るのが見えた。客がホームから乗り込もうとしているところだった。それに気づいた途端今度はレイのホームのひとつ後ろでも一体の影が現れ車両が白く光った。え？ どういうこと？

乗客の数はたしかに無限であったが誰もが奇数番号のホームから乗っているのだった。このときレイは自分が偶数番号のホームにいることを悟った。何ということか。無限の数の客は奇数番号の車両に乗るのだ。これでは永久に乗客が現れることはない。レイはここに取り残されてしまうと思い愕然とした。

レイがたたずんでいる間にも白い光はひとつ飛ばしで遠く彼方へ延びてゆく。光の延びが見えなくなりしばらく時間が経って始発ホームから一条の白い光が動き出した。一条の光は長くなりながら近づいてきてレイの前を猛烈な速さで通過していった。無限の客を乗せた無限列車であった。さっきレイの前後のプラットホームから客が乗った車両も無限列車にさらわれてしまい黒い球体に入れ替わっている。目の前には黒い点列だけがどこまでも続くのだった。レイは絶望を覚えた。

しかしレイは気づいていなかったが望みが絶たれたわけではない。このホームの番号以上の有限数の客が乗車すればよいのだ。そのときはこのホームにも間違いなく一体が現れるだろう。レイはそれを待てばよいのである。しかし無限ではないがとてつもなく数が多い団体客となると限られるものだ。‘グラハム一家’や‘スキューズ倶楽部’の一行が乗車してくれるのを願うばかりである。レイは何もないプラットホーム上で左右に連なる黒い球体の列をじっと見つめていた。

★

無限ホテル

ヒルベルト^{*1}の無限ホテルのパラドクス

無限ホテルはいつも満室である。そこへひとりの宿泊希望客がやってきた。支配人は「ただいま満室でございます。少々お待ちください」と言って客室へ向かった。支配人は1号室の宿泊客に2号室へ移るようお願いした。次に2号室の宿泊客には3号室へ移るようお願いした。このように n 号室

^{*1} ダフィット・ヒルベルト (1862–1943): ドイツの数学者。
‘現代数学の父’と呼ばれる。

の宿泊客に $n+1$ 号室へ移ることを全宿泊客にお願いして回った。

そして待たせている客のところへ戻った支配人は「お待たせしました。1号室が空いております。どうぞお泊りください」と言ってことなきを得た。

次に10人の団体客が来た。支配人はあわてることなく n 号室の宿泊客に $n+10$ 号室へ移ってもらった。その結果1号室から10号室まで空けることができ団体客を泊めることができた。

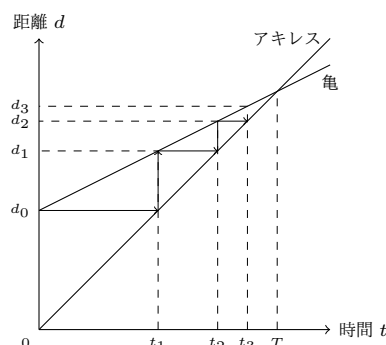
今度は無限人数の団体客が来た。それでも支配人はあわてず n 号室の宿泊客に $2n$ 号室へ移ってもらった。その結果1号室から順に奇数番号の部屋をすべて空けることができ団体客を泊めることができた。

無限ホテルはヒルベルトが集合の濃度についての説明をたとえ話にしたものである。無限ホテルがパラドクスと呼ばれるのは満室なのにいくらでも客を入れらるという点にある。

パラドクスでは‘アキレスと亀’の論法はよく知られている。亀がアキレスの手前から競争をスタートすればアキレスは亀に追いつけない。なぜなら亀が直前にいた場所にアキレスが到達しても亀はさらに前に行くからという理屈だ。理屈は辻褃が合っているが実際はアキレスは亀を追い抜くからパラドクスなのである。アキレスと亀の話はことばで説明するよりグラフを見る方が明快だろう。

アキレスは0から亀は d_0 からスタートする。アキレスが d_0 に到達する時刻は t_1 である。 t_1 のとき亀は d_1 にいる。アキレスが d_1 に到達する時刻は t_2 である。 t_2 のとき亀は d_2 にいる。アキレスが d_2 に到達する時刻は t_3 である。 t_3 のとき亀は d_3 に…。この状況を \Downarrow で追ってゆくといくらでも小さい範囲で \Uparrow が永久に繰り返される。しかし繰り返しは

$t < T$ の範囲内でのことである。



するとこの話は二者が同じ地点へ到達するまでを細かく分割して述べたものとわかる。パラドクスが生じるのは無限の時間に分割したことによる。現実の時間は無限に分割できない。

さて。自然数の集合と一対一に対応する無限集合を加算無限集合といいその濃度を \aleph_0 (アレフ_零) で表す。濃度とは無限集合の大きさの度合いと考えればよい。このことから奇数・偶数・素数などは

自然数	1	2	3	4	5	6	...
奇数	1	3	5	7	9	11	...
偶数	2	4	6	8	10	12	...
素数	2	3	5	7	11	13	...

からわかるようにいずれも \aleph_0 の濃度をもつ。そのため感覚的な記述をよしとするなら

$$\aleph_0(\text{自然数}) = \aleph_0(\text{奇数}) + \aleph_0(\text{偶数})$$

である。これ自体パラドクスであろう。

また自然数をたとえば3で割った余りで分けると

$$\aleph_0(\text{自然数}) = \aleph_0(\text{余 } 0) + \aleph_0(\text{余 } 1) + \aleph_0(\text{余 } 2)$$

とも書ける。 \aleph_0 はどれだけ加えても \aleph_0 なのである。

さて。こう言うと \aleph_0 って ∞ じゃないの? と思うかもしれない。たしかに ∞ はとてつもなく大きい‘状態’を指す記号である。だから

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \times \infty = \infty, \quad 2^\infty = \infty$$

のような表現は極限の感覚に照らして妥当だ。しかし \aleph_0 にはこの感覚はあてはまらない。なぜなら ∞ はこれひとつだが濃度は \aleph_0 ひとつではないからである。寓話: 幽体疑数旅行でそのことに少し触れている。

☆多 -----

[[レイの足あと]]

アレフ零—この名前はもちろん \aleph_0 のもじりだ—が乗った無限列車は無限ホテルのように空きを作るのではない。逆に空きを埋める—乗客の白い球体を黒い球体に置き替える—のである。グウソスウ様が乗った列車がそうだった。つまり数直線上の1が抜けたところに2以降の抜けていない点を順次交換移動させて数直線をすべて埋めることをしている。この操作はシフト (shift: 交換) と呼ばれる。

ここに登場したグウソスウ様は偶素数2である。グウソスウ様に仲間がないというのは2以外の素数はすべて奇数であることを指している。

またセイタメンタイ族一行がひとつの車両に全員乗らなかったのは実際に乗れるからである。正多面体は正四面体・正六面体 (立方体)・正八面体・正十二面体・正二十面体の5個ですべてである。正多面体はどれも球に内接するがたとえば正十二面体の中に正六面体は内接する。その正六面体の中には正四面体が内接する。

ほかにも正六面体と正八面体は互いに頂点が面の中心に内接するなど互換関係にある。正十二面体と正二十面体も同様の関係だ。セイタメンタイ族一行が離れがたい気持ちはよくわかる。

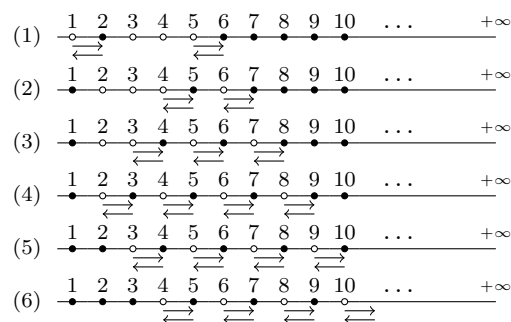
シフトは数直線上の抜けた点をほかの点との交換によって穴埋めする。 $+\infty$ 方向から一足飛びに点

を移動させてもよいのだがそれでは感覚頼みになってしまう。抜けた点がどのように散らばっていたとしても確実に抜けを埋める例を示そう。

そのための規則はひとつだけで十分だ。それが

○の直後が●ならば互いに交換する

である。次の例はこの規則だけを適用して数直線の穴を埋めている。



例から察するに連続する○はシフトにより間に●をはさみながら $+\infty$ の彼方へ追いやられる。同じことが有限個の点が抜けた数直線を‘無限からのシフト’によって完全な数直線にできることもわかる。

しかし寓話でレイが見た○の移動の仕方はシフトと異なる。5体グループが乗った列車は連続する○がつながったまま移動していたからだ。またレイが乗った列車は飛び飛びの○がつながりながら移動していた。いずれにせよ○と●が交換され○が $+\infty$ へ移動することには変わりはない。

ところでユウリスウ商事ご一行は無限の数の客が奇数車両に乗ったのだった。レイには乗車方法が謎だったようだ。でも有理数は奇数と一対一に対応するのでユウリスウ商事の全社員が奇数車両に乗れたのである。

有理数が奇数と一対一に対応していることは次のようにしてわかる。まず有理数—分子・分母ともに整数である数—を一覧表にして約分可能な分数は除

外する。表中で () をつけた分数が除外対象である。

分子 分母	1	2	3	4	...
(○△課) 1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{5}$
(※凹課) 2	$\frac{1}{2}$	$(\frac{2}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{4}{2})$...
(◇☆課) 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{3}{3})$	$\frac{4}{3}$...
(凸×課) 4	$\frac{1}{4}$	$(\frac{2}{4})$	$\frac{3}{4}$	$(\frac{4}{4})$...
⋮	$\frac{1}{5}$	⋮	⋮	⋮	⋮

そして 1 から順に () の分数を飛ばしてジグザクに右下へ向かって「数」を拾って—つまり 1, 3, 5, ... と奇数を振って—いくとよい。これで既約分数で表したすべての有理数が奇数に対応した。

ユウリスウ商事の一行は無数の部門に無数の社員がいる想定であった。分母が部門番号で分子が所属社員番号とすればこの表より全社員が奇数番号の車両に乗れる。この場合は () の分数は欠員番号にしてもよいが (社員番号)/(部門番号) は約分するものではないので飛ばす必要はない。

レイは車内からプラットホームの番号を確認したとき桁の単位を読んでいた。無量大数までは‘塵劫記’に書かれている正式の単位らしいがそのあとの不可説不可説転までは正式なものではない。仏典における悟りの功德の大きさを表したものという。

無量大数は 10^{68} の大きさである。レイは塵劫記の呼び名に続けて仏典の呼び名を当てていた。無量大数以降も 10^4 ごとに単位が与えられるとすれば不可説不可説転は 10^{560} になるからレイが目安にした $2^{1000} \approx 10^{301}$ はゆうに超えている。ただ Wikipedia には仏典の命数法は俱胝 $:= 10^{7 \times 2^0}$ からはじまり 不可説不可説転 $:= 10^{7 \times 2^{122}}$ までとありレイの数え方とは違うようだ。とはいえ無量大数ですら無用単位だと思うのでその先の数え方なんてどうでもよいと思うのだが。

しかしこれだけ巨大な数でも ∞ に対しては点ひとつの大きさにも満たない。だからレイが下車したホームからでも始発ホームの柱がすぐ後ろに見えたのである。無限とは本当に想像を絶する概念なのである。

ところでレイは終点があるか気になったようだ。もちろん‘終わりの地点’などない。それがあれば有限になるからだ。しかし終わりがなくても一定時間で彼方まで行ける。このことは寓話: 銀河無限鉄道 2 で触れている。