銀河無限鉄道 2（'超限順序数' の寓話）

1

レイは途方に暮れていた。興味本位で無限列車に乗ったはよいけれど辺境のプラットホームに独り残されてしまったからだ。ついさっきも無限の数の客が乗車していた。しかし客は奇数番号のホームから乗るのだった。レイがいるのは偶数番号のホームだから乗客には会えずじまいであった。

それならフロントパーサーと連絡が取れないものかと思い目の前の黒い球体に近づいたが何の反応もない。正規の乗客でないと扉は開かないのだろう。始発ホームで扉が開いたのはパーサーの操作だったのかもしれない。結局レイは待つ以外にすることはなかった。

この間にもいくつかの列車がレイのいるプラットホームを通過していったが一度だけ変わった光景に出会った。それはレイのホームを通過した列車から白く光る一両の車両が線路の下へ潜るようにして切り離されたのだ。その車両はしばらく列車と並走するように見えたが次第に速度を落としてプラットホームに横付けされた。ははあ。途中下車はこんなふうにするんだ。レイが乗っていた車両もおそらく同じようにしてこのホームに停車したのだろう。

レイはこの光景を見たことで切り離された車両は通過したプラットホームには戻れないだろうと感じた。乗車中パーサーに１番ホームに降りると告げても無駄だったに違いない。そう考えると始発ホームに戻ってくる車両はどれも客を乗せていないことに合点がいった。回送車両なのである。だったらやはりこのホームから乗車する客かこのホームで下車する客がいない限り帰る手段がないことになる。レイは打つ手がなくなったと思った。また時間だけが過ぎていった。

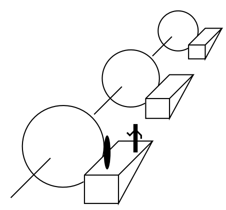
2

あれから何本の列車がこのプラットホームを通過していっただろう。レイはすることもなく始発ホームにそびえる柱の足元から光る点列が延びたあと柱を離れてこちらへ向かう様子を繰り返し見ていたのだった。

また光の点列が延びてきた。レイはこの点列もある程度の長さになったら柱を離れ一条の光となってこちらに向かってくるのだろうと焦点の定まらない視線を向けていた。ところが光はどこまでも延びてきた。それもひとつ飛ばしではなく連続している。え？　どんな団体が乗車中なのだろう。

ここでようやくレイは気づいた。そうか。とてつもなく大きな数の団体なのだ。レイは頼むからこのプラットホームの番号より大きな数の団体であってくれと切に願った。光る点列はまだ延びてくる。とうとうひとつ前のホームの球体が白く光った。直後にレイのホームにある車両も白く光った。一体の客が車両に乗り込もうとしていた。レイは急いで客に近づいて叫んだ。

「ちょっと待って！」



いま車両に乗ろうとしていた客は突然の声かけにひどく驚いて体を揺らした。

「なんだ。お前は」

「あ。驚かせてすみません。怪しいものじゃないです」

乗客はレイをいぶかしんで少し距離を空けた。レ

イはあわてて言葉を継いだ。

「実は途中下車したんです。あなたはどうやってこのホームへ来たのですか？」

「どうやって？　どうもこうも乗車パスを使って指定のホームへ移動したに決まっているじゃないか。あんたは違うのか？」

乗車パスだって？　レイは乗車パスなど持っていなかった。客はこれ以上時間をかけたくなかったようで車両に乗り込もうとした。最後にレイは客にお願いをした。

「あの。発車したらフロントパーサーに伝えてくれませんか？　このホームに乗車パスを持ってない客が取り残されてるって」

レイに頼まれた客は席に着きながら答えた。

「わかった。そうしよう」

乗客が席にすっぽり収まると扉が自動的に閉まった。しばらくするとレイの視界にある車両が同時にゆっくり動き出した。車両は速度を上げながら白い光の列となって彼方へ向けて去ってゆくのだった。列車が去ったプラットホームにはずっと遠くから弾かれてきた黒い球体が収まり続けた。

3

プラットホームに所在なげにいたレイの目の前に一体のパーサーが現れた。思っていたより早い到着にレイは喜んだ。

「ああ。よかった。私をここから助け出してください」

「助け出すとは大袈裟ですね。私にできることはここから乗車パス発行所へご案内することです」

そう言ってパーサーはレイにリング状のギアを手渡した。

「これは？」

「移動パスです。乗車パスではありません。これを身につけて移動します」

移動パス？　乗車パスとは違うの？　レイが困惑しているのを横目にパーサーは続けた。

「では行きましょう」

するとレイの目の前で停車中の黒い球体が揺らいで見えたと思ったら何かに体を押されたように感じた。何が起こったのか考える間もなく揺らいでいた目の前の景色が変わっていた。

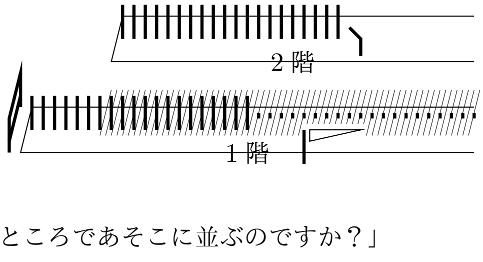
「乗車パス発行所です」

レイは乗車パス発行所よりも始発ホームへ戻りたかったのでパーサーにそうこぼした。パーサーは済まなそうに答えた。

「申し訳ありません。発行所へお連れするのが私の役目なのです。それに乗車パスをお忘れになったりなくしたりするお客様は思いのほか多くいらっしゃいますので。そのような大勢のお客様のご要望に逐一応えられないのです。だからまず乗車パスを手に入れていただくことにしているのです」

そう言ってパーサーはレイに渡した移動パスを返してもらった。たしかにパーサーの言う通りかもしれない。そもそも乗車パスを持たずに無限列車に乗ったレイに非があるのだろう。それでもレイはここに来られたことに安堵したのだった。

見まわすとレイの視線の先に 20 体が列を作っているのが見えた。



「ところであそこに並ぶのですか？」

「そうです。でもここは 2 階ですね。1 階はどこかの団体が乗車パスを受け取りに来ているようです。それが済めばこの階の順番になります」

そう言われてレイは 1 階の様子をのぞいてみた。かなり大勢の客が待っているようだ。列の後ろは . . . どこまで続いてるんだ？　まったく見えないじゃないか。列の横で整列にいそしんでいる添乗員がいる。'ソスウ奇術団ご一行' と書いてある旗を持っているのが見えた。パーサーが事もなげに言った。

「ああ。ソスウ奇術団ですか。宇宙一評判のよい奇術師集団ですよ。団員は無限にいるのであらゆる奇術を披露できるのが売りですね」

なに？　団員が無限にいるだって？　パーサーはレイが何か言う前にことばを継いだ。

「ですからあなたが乗車パスを受け取るのは $\omega+21$ 番目ということになります」

パーサーがさも当然というふうに言うのでレイはあわてて聞いた。

「私の前に無限の数の乗客がいるんですよね。だったら $\omega+21$ 番目なんて言っても私の順番は回ってこないじゃないですか」

「いいえ。ちゃんと回ってきますよ」

そう断言されるとレイは返すことばもない。実際レイが乗った列車は無限の数の客を乗せて発車したのだ。無限の数の全員に乗車パスが渡されていたから発車できたのである。ただどうすれば時間内に無限の数の全員にパスが渡せるのかレイにはわからなかった。

4

順番が回ってくると言われてもやはりレイは気になって仕方ない。つい 1 階の様子はどうなっているかのぞいてしまうのだった。のぞくたびに前の方の乗客は列からいなくなり後ろから来る乗客と入れ替わっていた。たしかに順調に乗車パスが渡されているのだろう。しかし後ろの方はいつまで経っても延々乗客の列が続いているのだ。本当に自分の番が来るのだろうか？

「あまりジロジロ見ない方がいいですよ」

レイは後ろから声をかけられた。いつの間にかレイの後ろも乗車パスを受け取るために大勢の客が連なっていた。

「でも気になるんですよ」

レイは心情を言ったつもりが声をかけてきた乗客はぴしゃりと言い放った。

「見ていると回る順番も回ってきませんよ」

レイにはその意味がよくわからなかったがその言い方に押されて素直にしたがうよりほかなかった。

手持ち無沙汰になったレイがなんとなく周りを見ているうちにレイの後ろには無限の数の乗客が並んでいるように見えた。無限鉄道は盛況なんだな。そう思ってふと見上げると 3 階が見えた。あれ？　さっきまでは何もなかったはずだが？　乗車パスを受け取る客が増えたのだろうか。この調子で乗客が増えたらどうなるんだろうとレイが考えたとき前方から乾いた声がした。

「1 番のかた。窓口へ進んでください」

レイが声のした方を見ると列の先頭の乗客が窓口へ向かうところだった。いつの間にかレイの列は 1 階に並んでいた。さっき 1 階にあった長蛇の無限列はきれいにはけていたのだ。どうやって無限列の全員に乗車パスが渡されたのだろう？　順番に終わりなんてないはずなのに。

ここでレイはパーサーが言った $\omega+21$ 番目の意味を考えてみた。そうか。だから自分の順番が $\infty+21$ でなく $\omega+21$ だったのだ。

$\infty+21$ ならイメージとして

『$1\ 2\ 3\ \ldots\ n\ \ldots\ 1\ 2\ \ldots\ 21$』

のようなものだろうか。このとき $n \to \infty$ なのだから後ろの $1\ 2\ \ldots\ 21$ まで順番は回らないだろう。1 の前に無限の ‘. . .’ があるのだから。でも $\omega+21$ ならイメージとして

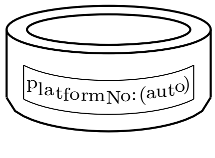
『$(1\ 2\ 3\ \ldots\ n\ \ldots)\ 1\ 2\ \ldots\ 21$』

のようなものだろうか。このとき $n \to \infty$ であっても $(1\ \ldots)\ 1\ 2\ \ldots\ 21$ は順番として回ってくるに違いない。1 の前で ‘$\ldots)_{\text{ひと区切り}}$’ ついているのだから。

こんなことを考えていると窓口から 21 番のかたと呼ぶ声が聞こえた。レイは窓口に進むと無事乗車パスを受け取ることができた。パスを受け取って窓口を離れる際に後方まで延々続く列を見てレイはずーっと先の乗客はいったい何番のかたと呼ばれるのだろうか気になった。そんな大きな番号なら読み上げるだけで日が暮れてしまうじゃないか。そう思ってレイは不思議そうな笑みを浮かべるのだった。でもきっと ‘次のかた’ って呼ぶんだろう。

5

乗車パスを受け取ったレイは 20 番目にパスを受け取った乗客のあとに続いて乗車パス発行所を出た。前をゆく乗客は歩きながら乗車パスを操作している。行き先を設定しているのだろうか。すると前を歩く乗客の姿が揺らいで霧のように消えるのが見えた。なるほど。こうやって移動していたんだ。でも無限の数の団体客だったら？　とてつもなく大きな番号のホームなんて設定できるのか？　レイは疑問に思ったが無限の数の団体客ならきっと自動設定されるのだろうと思うことにした。



レイも歩きながら行き先を設定しようとしたがやめた。うっかり変な操作をしないためにも立ち止まって慎重に行き先を 1 番ホームに設定することにしたのだ。設定が済むと辺境のプラットホームから移動したときの感覚がレイを包んだ。

目の前の揺らぎがおさまるとそこは 1 番ホームであった。淡い光を発する柱から先は黒い球体が列をなしてどこまでも続いている。レイは覚えのある光景を見て深く息をついた。ああ。ようやく戻れたんだ。

サービスパーサーの方へ向かって歩いていくとパーサーが声をかけてきた。

「お戻りになられたのですね」

「ええ。なかなか刺激的な列車でした。またいつか乗りたいと思います」

「そうですか。では今日はもうお帰りですか？」

「そうしようと思ってます」

レイはパーサーに礼を述べて帰ろうとした。するとパーサーが最後にあわてて言った。

「乗車パスはお預かりします。今度乗車されるときは新たに乗車パスを発行してもらってください」

レイはパーサーに乗車パスを渡して改めて礼を述べて始発ホームをあとにした。駅の改札を出たレイはタクシーを拾い自宅へ向かうよう指示をした。タクシーの中でレイは次回乗車するまでに下調べはしておくべきだなと思った。辺境のプラットホームで見た光景を思い出したからだ。あのとき辺境のさらに先で一両の車両が列車を離れて遠くのプラットホームに停車したのを目にしたのだった。あんなところに何があるのだろう？　おそらく知る人ぞ知る名所なのだろう。

そうだ。新たな名所ができたって聞いたぞ。たしか 57 番ホームだ。特別な素数があるところらしい。まずはそこへ行ってみようか。レイは次にタクシー

を利用するときは無限列車の乗車パス発行所へ向かうときだなと考え家路についた。

★彡 ‗ ‗ ‗‗ ‗‗‗ ‗‗‗‗‗ ‗‗‗‗‗‗‗‗ ‗‗‗‗‗‗‗‗‗‗‗‗‗ ———————

超限順序数

自然数の使い方には 2 通りあってひとつは**基数**としてもうひとつは**序数**として使う。たとえば単にものが 5 個あればこの 5 は基数として用いている。もし 5 個のものに順序があればこの 5 は序数として用いていて 5 の前に必ず 1, 2, 3, 4 がある。

> たとえば野球の塁の数え方は序数である。ホームベースへ行くには必ず一塁・二塁・三塁を順に踏んでいる。ちなみに基数の呼び方は英語なら 1(one) 2(two) 3(three) ... で日本語なら 1（いち） 2（に） 3（さん）... である。序数では英語なら 1st(first) 2nd(second) 3rd(third) ... で日本語なら一つ（ひとつ）二つ（ふたつ）三つ（みっつ）... である。

自然数

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$$

の並び方を ω で表す。自然数と**同型**の並び方も ω だ。このように可算無限集合に順序を与えたものを**超限順序数**という。

よって奇数だけの並び方も ω であり偶数だけの並び方も ω となる。したがって先に奇数を並べてそのあとに偶数を並べる

$$1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots$$

の並び方は $\omega+\omega$ と表す。

さて。そういうことなら超限順序数はいくらでも拡張される。たとえば自然数を剰余別に

$$\overbrace{1,\ 4,\ 7,\ \ldots}^{3\text{ で割った余り }1},\ \overbrace{2,\ 5,\ 8,\ \ldots}^{3\text{ で割った余り }2},\ \overbrace{3,\ 6,\ 9,\ \ldots}^{3\text{ で割った余り }0}$$

と並べれば $\omega+\omega+\omega$ である。ただこの調子で並び方が増えた場合は

$$\overbrace{\omega+\omega+\cdots+\omega}^{n\text{ 個の}\omega}=\omega n$$

と書く約束だ。よって $\omega+\omega+\omega=\omega 3$ であるがこれは 3ω でも $\omega\times 3$ でもないことに注意されたい。'ω の階層' とでもいうものが 3 段階目に上がったという感覚である。

すると n で割ったときの余りに応じて

$$\overbrace{n,\ 2n,\ 3n,\ \ldots}^{\text{余り }0},\ \overbrace{n+1,\ 2n+1,\ 3n+1,\ \ldots}^{\text{余り }1},\ \ldots$$

と並べれば $n\to\infty$ のとき $\omega+\omega+\cdots$ となり超限順序数が無限に並ぶ。そこでこの並び方を ω^2 で表す。これも ω^2 乗や $\omega\times\omega$ でもないことに注意されたい。'ωn の階層' とでもいうものが 2 段階目に上がったという感覚である。

いましれっと 'ω^2 で表す' と述べたが実は重要な考えを含んでいる。つまり

$$\omega+\omega+\omega+\cdots=\omega^2$$

が表す意味は $\omega+\omega+\omega+\cdots$ と書かれた式を ω^2 と '置いた' のであって和が ω^2 に 'なった' わけではない。

> $\omega+\omega+\omega+\cdots$ は $\omega n\ (n\to\infty)$ のことで $n\to\infty$ のときの n を ω に '書き直す' と考えれば
>
> $$\omega n\ (n\to\infty)=\omega\omega=\omega^2$$
>
> のような計算に見える。記述は理にかなっているだろう。

それに対して

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=1$$

は左辺の級数が和をもちそれが 1 に 'なる' のだ。そ

のことは**寓話: 1 になあれ**で述べた等比級数の和の公式からわかる。だから ω^2 は

$$2+2+2+\cdots=\infty$$

の感覚に近い。この式は級数の和を求めたのではなく無限大になる様子を表したものだ。しかし ω^2 は '数値' でもなければ '状態' でもない。微妙な立ち位置にいるのである。

で。この段階には終わりがない。次の段階は

$$\omega^2+\omega n\ (n\to\infty) \quad \text{を経て} \quad \omega^2+\omega^2$$

に至る。さらに

$$\omega^2+\omega^2+\omega n\ (n\to\infty) \quad \text{の繰り返しを経て}$$
$$\omega^2+\omega^2+\omega^2+\cdots$$

に至る。そして

$$\omega^2+\omega^2+\omega^2+\cdots=\omega^2 n\ (n\to\infty)=\omega^3$$

で表す... といくらでも続くのである。超限順序数はつかみどころがない。

☆彡 _ _ -- --- ----- -------- ------------- ———————

[[レイの足あと]]

レイがいたプラットホームから乗車した客は巨大数グループに所属する一員であった。'**グラハム数**使いの一家' か '**スキューズ数**オタクの倶楽部員' だったのだろう。こういうグループは何らかの規則で構成されるものだ。単に数字をずらーっと並べたわけではない。たとえばグラハム数を表すには 'クヌース[*1]の矢印表記' を用いる。それが '↑' だ。ほんの少しだけ説明しておこう。

> ↑が 1 個の場合は $a\uparrow b=a^b$ と定義する。ふつうの指数計算と同じだ。
> ↑が n $(n\geq 2)$ 個の場合は n 個の↑を $\uparrow^n$ と書くことにして再帰的に $a\uparrow^n b=a\uparrow^{n-1}(a\uparrow^n(b-1))$ と定義する。
> また $a\uparrow^n 1=a$ および $a\uparrow^n 0=1$ とする。
> この定義でたとえば $2\uparrow\uparrow 4=65536$ となる。また $2\uparrow\uparrow 5\approx 2.0\times 10^{19728}$ である。4 を 5 にしただけでこの違いは恐ろしい。

レイが下車したホームの番号はどうだったのだろう。不可説不可説転は超えていた。仏典の名称を 10^4 ごとに使えば $2\uparrow\uparrow 5$ ほど大きくないはずだが仏典どおりならこんなに小さくないはずだ。

さて。レイが辺境のプラットホームを離れて乗車パス発行所で並んだときは 1 階と 2 階を合わせて

$$1,2,3,\ldots,n,\ldots,1,2,\ldots,20,21_{\text{レイ}}$$

となっていたので先頭からレイまでの並び方は $\omega+21$ である。しかしこれとは逆に

$$1,2,\ldots,20,21_{\text{レイ}},1,2,3,\ldots,n,\ldots$$

と並んでいたら先頭からの並び方は $21+\omega=\omega$ となる。なぜならこの並び方は自然数の並び方と同型だからだ。したがって自然数 n に対しては

$$\omega+n\neq n+\omega\ (=\omega)$$

である。超限順序数では '+' は通常の和ではないので**和の交換法則**は成り立たない。

レイが並んだあとのことにも触れておこう。まずレイが乗車パス発行所に着いたときの列は $\omega_{/1\mathrm{f}}+21_{/2\mathrm{f}}$ であった。

> '${}_{/\text{添字}}$' は ω や 21 の並び方が何階にあるか（${}_{/2\mathrm{f}}$ は 2 階）および 1 階から何階までを占めるか（${}_{/:2\mathrm{f}}$ は 1

[*1] ドナルド・E・クヌース（1938–）: アメリカの数学者・計算機科学者。

階から 2 階まで）を表している。

その後無限の数の乗客が後ろについたので列は $\omega_{/1\mathrm{f}} + \omega_{/2\mathrm{f}} = \omega 2_{/:2\mathrm{f}}$ となった。つまり $\omega 2$ は 1 階から 2 階まで満杯になったことを意味する。次に 3 階に乗客が n 体並べば $\omega 2_{/:2\mathrm{f}} + n_{/3\mathrm{f}}$ だ。レイはこのころ 3 階の存在に気づいたのだろう。そして 3 階の列が無限に延びれば $\omega 2_{/:2\mathrm{f}} + \omega_{/3\mathrm{f}} = \omega 3_{/:3\mathrm{f}}$ である。ここで 1 階から 3 階までが満杯となる。これが延々繰り返されて

$$\underbrace{\overbrace{\omega n_{/:n\mathrm{f}} + \omega_{/(n+1)\mathrm{f}}}^{\omega(n+1)} + \omega_{/(n+2)\mathrm{f}}}_{\omega(n+2)} + \cdots = \omega^2_{/:\infty\mathrm{f}}$$

となるのである。

ω^2 は乗車パス発行所に無限の階ができたことを意味する。もしこのあと一体でも乗客が増えれば $\omega^2_{/1\text{棟}} + 1$ なのだが $+1$ の乗客からは 2 棟目の乗車パス発行所に並ぶのだ。乗車パス発行所も無限にある。レイの心配には及ばない。

では乗車パスはどのように発行されていたのだろうか。実は乗車パス発行所は一階あたり 100 分で乗車パスを発行していたのだ。レイが窓口に立ち乗車パスを受け取るまでの時間はレイの前の乗客にかかった時間の 0.99 倍というのがことの真相である。そしてレイの後ろの乗客にかかる時間もレイの時間の 0.99 倍だ。

具体的には 1 階の列の先頭の乗客は乗車パスの発券に 1 分かかる。2 番目の乗客は 1×0.99 分かかる。n 番目の乗客の発券時間は $1 \times (0.99)^{n-1}$ 分である。つまり 1 階にいた無限の数の全員に乗車パスが発券される時間は

$$\begin{aligned} &1 + 1 \times 0.99 + \cdots + 1 \times (0.99)^{n-1} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-0.99} = 100 \end{aligned}$$

ということで 100 分後には 2 階の乗客の順番が回ってくるのであった。この計算には寓話: 1 になあれの中で述べた等比級数の和の公式を用いた。

> 余談ながら一定時間に無限の処理が完了するなら終了間際の一処理は超短時間すぎてとても見えたものではないはずだ。にもかかわらずそれが見えていたとしたら一処理に相応の時間がかかっていることになる。
> 列に並んだレイが後ろの乗客から指摘されたことは見ていないうちに超短時間で処理が済まない限り全処理が終わらないと言いたかったのだろう。

また無限の数の乗客の行き先はレイの想像どおり乗車パスに自動設定される。ユウリスウ商事の場合は最初の乗客のパスには $r_1 = 3$ が設定された。本来は $r_1 = 1$ だが 1 番ホームですでにレイが乗ったためだ。パーサーは r_1 の値を定めるためレイに乗車確認をとったのである。

2 番目以降の乗客のパスには全員 $r_{n+1} = r_n + 2$ が設定された。乗車パスは互いに通信して r_1 の値から漸次 r_{n+1} の値が決まるのだ。それで全員が正しいプラットホームから乗車できたのである。もちろん乗車時間は発券時間同様に一定時間で済む。そして自動設定のおかげでレイがいるホームのとんでもなく長い桁数の番号でも正しくパーサーに伝わったのだ。その番号はレイのホームに来た乗客のパスに設定されているのだから。

さて。以上のように一定時間内に無限の数をさばけるのでレイが乗った列車も無限の彼方まで時間内に行けるのである。実は無限列車は先へ行くほどプラットホームの通過時間が r 倍（$r < 1$）になっている。つまり最初の 10^n 番分のホームを m 分で通過し次の 10^n 番分のホームを $m \times r$ 分で通過し次の 10^n 番分のホームを $m \times r^2$ 分で通過し. . . のよ

うに走る。それで結局 $\dfrac{m}{1-r}$ 分で無限の番号分のホームを通過できるのである。

具体的に $m=2$ で $r=0.8$ ならば彼方までの乗車時間は $\dfrac{2}{1-0.8}=10$ 分である。したがってあとから無限の数の客が乗る可能性を考慮すれば次の発車時刻は 10 分後以降でなくてはならない。無限列車の発車時刻は m と r の値で管理されているのであった。

レイが始発ホームに戻ったときパーサーはレイを覚えていた。レイはひとりひとりの客にパーサーが気を配っていたことに礼を言いたかったのだろう。

帰路についたレイが訪れてみようと思った 57 番ホームは'グロタンディーク[*2]素数' と呼ばれる石碑が立っている名所だ。石碑の由来はグロタンディークが素数に関する一般論について講演をした際に具体的な素数としてうっかり 57 を挙げてしまったことによる。近場の名所だけに大勢が面白がって訪れている。

[*2] アレクサンドル・グロタンディーク（1928–2014）：ドイツ生。フランスで活動した数学者。