1 になあれ（'$0.999\cdots=1$' の寓話）

1

アレフ零（レイ）が土星の衛星ティタンに引っ越してきて半月が経った。レイはいま学校から帰ってきたとろだ。もう学校には慣れて友達もできたけどはじめはちょっとびっくりしたものである。レイが通う学校にはさまざまな宇宙人種がいて外見の違いには驚かされる。

でもいちばんの驚きはアウタースーツなしでティタンの屋外を平気で飛び回る人たちを見たときだ。彼らはメタンを呼吸している生粋のティタン人たちだった。レイは酸素を呼吸しているので屋内ではスーツなしでかまわないが屋外ではスーツが必要である。だからティタン人はレイたちの建物には入ってこない。でもレイたちはティタン人ともよく遊ぶ。そのときはレイたちがスーツを着なくてはならないけど。

レイは自分の部屋に入ると今日学校で習ったことを思い出していた。マセマの先生が言っていたことだ。

「みなさん。$0.999\cdots=1$ なんですよ」

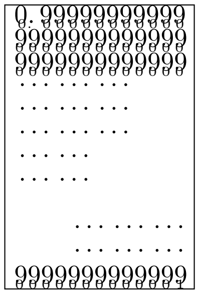
すると教室はちょっとした騒ぎになった。レイはそうなんだあって思ったけどほとんどの生徒はおかしいと言った。その理由も皆同じであった。

「だって $0.999\cdots$ は 1 より $0.000\cdots1$ だけ小さいじゃん」

親がタイタン会計事務所で働いている家の子なんかは $0.999\cdots$ と 1 では帳尻が合ってないと言って憤慨していたものだ。

そのときの様子を思い出しながらレイは一枚の用紙と黒ペンを取り出した。そして用紙の左上にまず '0.' と書いてそのあとに '999...' と書きはじめたのである。1 行目がいっぱいになると 2 行目に移りさらに '999...' を書いた。そして用紙の右下まで '9' を書ききると一息ついてペンを置いた。

すると直後にレイが書いた '0.' の下に赤い文字で '0.' が書き込まれたのである。え？　なに？　レイがびっくりして見ているとその後ろに赤い文字で '000...' が書き込まれた。そのまま見ていると赤い '0' は 2 行目から 3 行目を埋めて最後の行まで来た。そしてレイが最後に書いた '9' の下にくっきりと赤い文字で '1' が書かれたのである。どこからか '声' が聞こえた。



『その数は 1 より $0.000\cdots1$ だけ小さいよ。だから 1 じゃないね』

「そうじゃないってば。まだ書いてる途中なんだから」

そう言ってレイはもう一枚の用紙を取り出した。そしてさっきの続きと言わんばかりに '999...' を書き続けたのである。

2

2 枚目の用紙は先頭から '9' が並びはじめた。レイは 1 枚目とまったく同じに '9' を書き続けて用紙の最後までを '9' で埋めた。そこでレイは少しばかり手を休めたところ 1 枚目の最後にあった赤い文字の '1' が '0' に変わったのだ。そしてすぐに 2 枚目の先頭から赤い '0' の文字が追加され 2 枚目の最後の '9' の真下に '1' が書き込まれたのである。

『それも 1 じゃないね』

そんなことはレイにもわかっている。

「じゃましないでよ。まだ書いている途中なんだから」

そう言ってレイは 3 枚目の用紙を取り出した。今度は 3 枚目の最後まで '9' を書いたあとすかさず 4 枚目の用紙を取り出して '9' を書き続けた。

「まだ書き終えてないから。邪魔しないで」

レイは意地になって書き続ける。用紙は 5 枚 6 枚と数を重ねついには 1 カートン分の用紙が積み上がった。しかしレイはここで手を休めることはせず 2 カートン目を積むべく次の 1 枚を取り出し '9' を書き続けた。用紙の束は 5 カートン. . . 10 カートン. . . と積み上がってゆく。そしてとうとう用紙の束で部屋を満杯にしてしまった。

さあ。次はどこで書こうかと思ってレイは家の中を見まわした。あまりゆっくり思案していると赤い '0' がさっきの続きに書き込まれてくるように思えてレイは急いで用紙を取り出し廊下に出た。そして取り出した用紙に続きの '9' を書くのだった。

「よかった。赤い文字は書き込まれてないな」

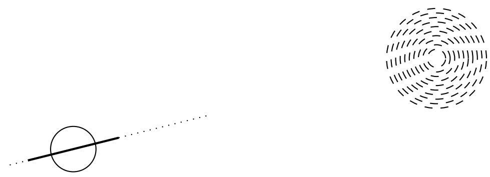
そう言ってレイは無心に '9' を書き続けたのである。

3

レイはいつの間にか家の外に出て用紙に '9' を書き続けている。外はメタンの空気だ。本当ならアウタースーツを着なくてはいけないはずがなぜか平気で数字を書いている。まるでレイの周りだけ酸素で包まれているようだった。

外に出たレイは無心で '9' を書き続ける。用紙の束が積み上がり地面をどんどん覆ってゆく。とうとうティタンの表面が高さ 1m 程度の用紙の束で埋め尽くされてしまった。レイはどんどん用紙を取り出し '9' を書き続けた。そこからまた 1m 程度の高さの用紙の束が地表を覆いティタンは高さ 2m の用紙に包まれてしまった。用紙の束はまだ積み上がる。

そうこうするうちメタンの層より高く用紙が積まれさらに積み上がった用紙のためにティタンの大きさが倍に膨れあがった。レイの手はもう止まらない。書き続けて用紙を積み上げてティタンはもとの 20 倍を超えた。気がつけば土星の大きさと変わらなくなっている。



レイがさらに '9' を書き続けるとティタンの大きさが 25 倍になった。ついに土星の大きさを超えてしまった。遠くから観測しているものがいたら土星が二重星になったと騒いでいるかもとレイは思うのだった。それでもレイの手は止まらない。やがてティタンの大きさはもとの 400 倍を超えた。いよいよ土星の輪が近づいてきた。

4

土星の輪は主に氷の塊である。輪は何重にもなっていて最外縁は氷の塊が広く希薄に広がっている。ティタンを埋め尽くした用紙が最外縁の氷の塊のひとつに触れるとレイはそこに用紙を乗せた。そして氷の上で '9' を書き続けたのだ。用紙が積み上がるにしたがって氷の塊が用紙の束で包まれティタンに吸収されてゆく。次に別の氷の塊に触れるとレイはそこでも '9' を書き続け氷を用紙の束で包んでティタンに吸収していった。

ちょうどこのころティタンより内側を回る土星の衛星がいくつかあった。しかしレイにとってはもう氷の塊も衛星も関係なかった。近づいてくるものに

用紙を乗せることができればどんどん‘9’を書き続けたのである。だから一時的にティタンの表面に小さな盛り上がりができてやがて周りから迫る用紙の波に埋もれてゆくのだった。

さて。輪の最外縁から内側に進むにつれ氷の塊が密集してくるとレイは輪に沿って用紙を置いていった。そのため土星の輪はどんどん太くなり薄っぺらだった輪はティタンに接触したままドーナツのようになっていった。レイはそれを見てつぶやいた。

「あ。なんだかドーナツが食べたくなっちゃった」

レイはタイタンドーナツ店で人気のサターンドーナツを思い浮かべていた。サターンドーナツの中はバウムクーヘンのように何層もの生地が重なり表面は 7 種類の異なる味の生地が包んでいる。隣り合う生地はどこも違う味どうしである。ドーナツのことを考えたのでレイはおやつの時間にしたくなった。でもここで中断するわけにはいかないので我慢するレイであった。

ドーナツの輪は大きくなるとともに最後は完全にティタンとくっついてしまった。土星はというと周りから太ってくる輪に迫られ最後は輪に飲み込まれて輪と一体化した。結局大きなティタンにこぶができたようになったのである。

そのまま大きく育った‘土星付ティタン’は太陽の公転軌道を回りながらとうとう周りの木星や天王星を飲み込んで膨らみ続けた。こうなると太陽と‘土星入りティタン’はもうどっちが主星かわからなくなっている。

やがてもとティタンだった‘紙の惑星’は太陽まで飲み込みついに半径 10AU を超える超巨大紙惑星となってしまった。それでもレイはまだ用紙を取り出し‘9’を書き続けたので紙惑星が太陽系にとって変わった。もう太陽‘系’などとは呼べない。半径 30AU の超巨大星があるだけだ。ひとつの星がぽつんとできてレイにもちょっとしたいたずら心が芽生えた。

レイは試してみようと考え‘9’を書き続けている手を休めたのである。すると紙惑星の中心付近から赤い光のようなものが見えはじめた。思ったとおりだ。赤い色はずーっと前にレイがいったん手を休めたときに書き込まれた‘$0.000\cdots1$’の続きである。きっと最後の赤い‘1’は‘0’になってそこからずーっと‘0’が書き込まれているに違いない。

案の定赤い色が表面近くに浮き出てくるようになった。そして紙惑星の表面を赤い‘0’が走り抜けレイが書き続けた‘9’の直前までやってきて最後の‘9’の真下に赤い‘1’が書き込まれた。

『それは 1 じゃないよ』

お約束どおりの‘声’が返ってきたがレイは‘声’を無視した。きっと遠くで観測しているものには超巨大赤色星が忽然と姿を現したように見えるだろうと思って面白がった。

5

紙惑星が赤く染まったのを見届けたレイは‘9’を書き続けることにした。太陽まで飲み込んだ紙の球体はさらに大きくなり太陽系の近隣の彗星なども飲み込みはじめた。さっきレイのいたずら心のせいで書き込まれた赤字の‘0’はとっくに埋もれていまは黒字の‘9’が書かれた用紙が積み上がっている。今度は遠くからはきっと超巨大ブラックホールでも出現したんじゃないかと思われるだろう。でもレイはそんなことはおかまいなしに用紙を追加し続けた。

いつしか紙惑星は銀河の端から膨れ上がって天の川銀河も飲み尽くした。さらにおとめ座銀河からアンドロメダ銀河から何から何まで飲み尽くして膨らんでいく。そしてとうとう宇宙をパンパンにするく

らいまで大きな球体になったのである。

レイは新しい用紙を取り出したいのだがもう置く場所がない。オロオロしているうちに宇宙の辺境部分が赤っぽく見えた。'0' の大群がやってくるんだ。もちろんレイもいまの状態が 1 ではないことは十分承知している。

ああ。魔法でも使えたらなあ。そうすればいま宇宙を埋めている '9' を一枚の用紙に詰め込めるのに。レイは漠然とそんなふうに思った。すると本当に宇宙を埋め尽くしていた大量の用紙が縮んで一枚の用紙になってレイが '9' を書きはじめた部屋に落ちたのだ。

いま真っ黒で真っ黒な真っ黒い用紙が一枚レイの目の前にあった。レイはその前に座っている。真っ黒い用紙は自らの重力のためかゆっくりと丸まりはじめた。用紙の端からは赤い色が広がってくる。このまま赤い色が用紙全体に広がれば最後に赤い '1' が書き込まれるだろう。そして言われるのだ。

『それは 1 じゃないよ』

そうはさせじとレイは用紙を一枚取り出して '9' を書き続けた。すると途中まで広がっていた用紙の赤い色が止まった。レイは気合を入れ直して '9' を書き続けるのだった。

6

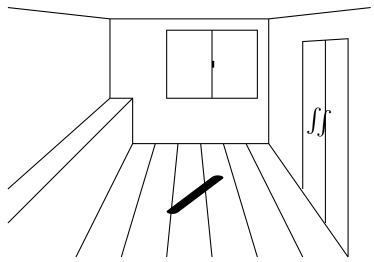
レイの部屋に真っ黒い用紙が落ちたころお母さんが仕事からちょうど帰ってきた。

「レイ。帰ってるんでしょ。部屋にいるの？」

声をかけたが返事はない。

「遊びに行っちゃったかな？　あれ？　これは落書き？」

お母さんが見たのはレイの部屋の床に真っ黒な色で太く書かれた 1 の文字であった。少し赤くなった部分もある。でもレイの姿はない。



どうやら真っ黒で真っ黒な真っ黒い用紙は自らを丸めるだけでなく付近の時空まで歪めたようだ。そのせいでレイの時間軸とお母さんの時間軸にずれを生じさせ同一空間に存在できなくなっているみたいなのだ。だからレイの目にもお母さんの目にも互いの姿は映っていない。

仕方がないのでお母さんは買い物に出かけることにした。たしかタイタンストアがセールをしていたはずだ。そのことを思い出して大きめのトートバッグを持って家を出ることにした。そうだ。レイの大好きなサターンドーナツも買っておこう。サターンドーナツは輪の中央にときどき当たりのチョコボールが入っているので実はお母さんも好きだったのである。

だいぶ時間が経ってお母さんが買い物から帰ってきた。でもレイの姿はなかった。それどころか床には '黒くて太い 1' が 1 ダースもあったのだ。ということはレイは宇宙を '9' で満杯にして魔法を使って黒くて太い 1 に丸めることを 12 回繰り返したことになる。きっと今度は黒くて太い 1 が宇宙を満たすのだろう。そうしたらレイはどうする？

もちろん魔法を使って宇宙を埋め尽くした黒くて太い 1 を '黒々としたぶっとい 1' に変えるに違いない。そして宇宙が黒々としたぶっとい 1 で埋まってゆくのだ。そしてさらに. . . 。ああ。この作業に終わりはない。

いまもレイは '9' の文字を書き続けている。部屋

の床には黒くて太い 1 が積み上がって巻物の山のようになっている。レイが書き続けることをやめない限り $0.999\cdots$ は 1 であり続ける。

★彡 - - -- --- ----- -------- ------------- ————————

$\boxed{0.999\cdots = 1}$

いくつかの簡単な説明がある。

小学生ならば。$\dfrac{1}{3} = 0.333\cdots$ の両辺を 3 倍すると $\dfrac{3}{3} = 0.999\cdots$ となる。よって $1 = 0.999\cdots$ でよいだろう。でも逆に見た目が違うので式がおかしいと言われるかもしれない。やぶへびである。そうなると納得してもらうのは難しい。

中学生ならば。$x = 0.999\cdots$ とおいて

$$\begin{array}{rrcl} & 10x & = & 9.999\cdots \\ -) & x & = & 0.999\cdots \\ \hline & 9x & = & 9 \end{array} \qquad \text{より} \quad x = 1$$

とすればよい。

高校生ならば。**等比級数の和**を求める公式

$$\boxed{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}}$$

に照らして

$$\begin{aligned} &0.999\cdots \\ &\quad = 0.9 + 0.09 + \cdots + 0.9(0.1)^{n-1} + \cdots \\ &\quad = \frac{0.9}{1-0.1} = 1 \end{aligned}$$

とすればよい。

> **級数**とは数列の項を '無限に足す式' を指す。式の和が求められるかどうかは数列次第である。数列が**等比数列**なら $-1 < r < 1$ のとき等比級数の和が求められる。つまり r がこの範囲であれば上記公式が使えるということである。

これで納得できなければ大学等で**実数の連続性**などを学ぶ必要があるがその前に '表記の違い' に言及しておこう。たとえば $\dfrac{1}{4}$ なら小数表記で 0.25 と書いて同じ値とみなす。'みなす' というのがミソだ。その上で $\dfrac{1}{4} = 0.25$ と考える。'考える' のである。

一方 $\dfrac{1}{3}$ の小数表記は $0.333\cdots$ のように '$\cdots$' を用いる以外の記述法がないので $0.333\cdots$ と書いて $\dfrac{1}{3}$ とみなす。つまり $\dfrac{1}{3} = 0.333\cdots$ と考える。だから $\dfrac{3}{3}$ と $0.999\cdots$ も表記は異なるが同じ値と考えるのである。

ほかに $\dfrac{1}{3} = 0.333\cdots$ であることは筆算からも妥当な記述であることが見てとれる。筆算は

$$\begin{array}{r} 0.\ 3 \\ 3\ \big)\ \overline{1.\ 0} \\ 9 \\ \hline 1\ 0 \end{array}$$

のようにはじめるだろう。このあとは余りの 10 が最初と同じなので 3 が繰り返し繰り返し...商に立つ。それなら $\dfrac{3}{3}$ を

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3\ \big)\ \overline{3} \\ 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \text{ではなく} \quad \begin{array}{r} 0.\ 9 \\ 3\ \big)\ \overline{3.\ 0} \\ 2\ 7 \\ \hline 3\ 0 \end{array}$$

とすればあとは余りの 30 が最初と同じなので 9 が繰り返し繰り返し...商に立つ。筆算の手順はまったく同じである。であれば筆算に照らして $0.999\cdots$ の記述と 1 は同じものとみなせばよいのではないだろうか。

しかしこのような説明で納得しない者は多い。理由は**無限**についての理解が不足しているためである。もっと言えば数学について認識不足だろう。というのは数学は人の頭の中 'だけ' にあるもので現実世界に存在しているものではない。あらゆる矛盾を排した思考の産物なのである。

いや。普通に $1 + 2 = 3$ などの計算をして現実世界で利用しているじゃないかと反論するかもしれない。しかしそれは現実世界に利用できる部分を取り

出して使っているのであって現実世界に落とし込めない部分は使わないだけのことである。

つまり $0.999\cdots$ のような無限の数値は数学の世界でのみ通用するものなのである。現実に無限は存在しない。終わりがないものを有限の時間内で扱えるはずもないのだ。だから現実感覚しか持ち合わせてなければ $0.999\cdots = 1$ が納得できない方がむしろ自然なのである。

現実世界では相入れないことでも数学の世界では矛盾がなければそれは正しい数学である。数学は金勘定とは違うのだ。帳尻が合っていなくても辻褄が合っていればよい。帳尻が合わない無限は昔から数学者を悩ませてきた。それでも数学者たちは長い期間をかけて一定の理屈として意味をなすものに仕上げたのである。

> 理屈の一端を垣間見ておこう。たとえば**収束**の定義はこんなふうに仕上げている。
> [定義] どんなに小さい正数 ϵ をとってもある番号 N が存在して
> $$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| < \epsilon$$
> となるとき点列 a_n は $n \to \infty$ のとき α に収束するという

数学者の理屈はわかりづらい表現が多い。しかし曖昧な言い回しに終始せずことばをきちんと定義して厳密に言うことが大事なのだ。そして必要なら関係式などを用いることが肝要である。

したがって本当に $0.999\cdots = 1$ を理解するためには収束とは/連続とは/無限とは等の理解が欠かせないのである。でも '理解' するだけではもやもや感が残る人はいるはずだ。もやもや感を消す最後の砦は '納得' できるかどうかである。

☆彡 _ _ -- --- ----- -------- ------------- ——————

[[レイの足あと]]

レイが最初に A4 用紙一枚にびっしり書いた $0.99\cdots9$ は 1 ではない。$0.00\cdots1$ だけ小さいからなのだがたとえばこの単位が m や g だったら $0.00\cdots1$(m または g) を測定することはできない。なぜならこの長さまたは重さは物質の最小単位の何倍も小さいからだ。現実世界ならそれはもう 0 である。つまり現実世界では $0.99\cdots9$ は何ひとつ不足していないのだ。

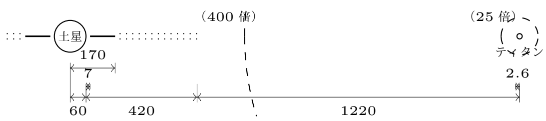
しかし数学的思考では $0.99\cdots9$ の '$\cdots$' にどれほど多くの '9' があっても最後を '9' で止めたらそれは 1 ではない。'声' はそのことを指摘したのである。

'声' によって書き込まれた赤字の '0.00. . . 1' は

$$\begin{array}{rl} & 0.\ 9\ 9\ 9\ \cdots\ \cdots\ 9 \\ +) & 0.\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ \cdots\ 1 \\ \hline & 1.\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ \cdots\ 0 \end{array}$$

を示している。つまり $0.00\cdots1$ だけ不足していると言ったのだ。もしかすると '声' は学校の生徒の意見を代弁したのかもしれない。

ティタンと土星の位置関係も述べておこう。図の単位は 1,000km で土星・輪の空隙とティタンの縮図は数値より若干大きい。



数値からはティタンが約 470 倍に膨らんで土星の輪の最外縁に接触することがわかる。輪の最外縁は非常に広範で希薄なのでレイはときどき近づいてくる氷の塊に用紙を乗せてティタンに吸収していった。

また土星にはかなり小さい衛星が 100 個以上あ

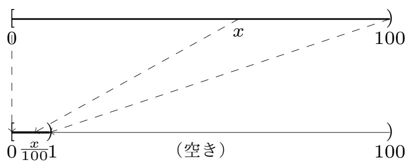
る。ティタンが膨らんで土星の輪に達する間にもそのような衛星は 10 個程度あるのでレイはきっと氷の塊と思って吸収したに違いない。

氷の塊が密集してきてレイが輪に沿って用紙を置けるようになるのは図の値で土星の中心から 170 のところである。そこが望遠鏡などで観測される輪でティタンが約 590 倍に膨らんだところだ。

それから輪が太くなったときレイはドーナツを思い浮かべた。サターンドーナツの表面は 7 種類の異なる味の生地の貼り合わせである。**四色定理**によると平面をいくつかの領域に分けて隣り合う領域は異なる色で塗るとすると最大でも 4 色で十分である。ところが同じことをドーナツ面—数学用語は**トーラス面**—でおこなうと 4 色では不十分で最大 7 色なら十分であることが知られている。

サターンドーナツは表面をかなり複雑に分けているようだ。そのため平面と違って 4 種類の生地で覆うことはできず 7 種類の生地を必要としたのである。もちろん表面を複雑に分けなければ 2 種類の生地でも覆える。でもそれでは味が単調になってしまう。サターンドーナツは複雑な味が売りである。だから値段もちょっぴり高いのだ。

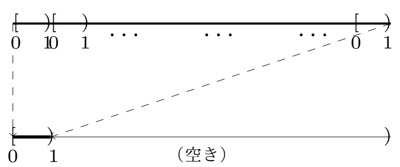
さて。レイは一度は宇宙を '9' で埋め尽くした。しかも魔法の力を借りてそれを一枚の用紙に閉じ込めることができた。でもレイがおこなったことは魔法というわけではない。数学では普通におこなわれることである。



たとえば数直線上の区間 [0, 100) を対応 $x \to \dfrac{x}{100}$ によって区間 [0, 1) へ '圧縮' することができる。区間 [1, 100) に '空き' ができる。レイが最初にかけた魔法がこれだ。おかげで宇宙を埋め尽くした '9' が黒くて太い 1 になったのである。お母さんが買い物から戻ったときレイはこの対応による圧縮を 12 回繰り返したところだった。

> 区間 [0, 1) という書き方は 0 から 1 の範囲を表すものだが '[0, ' 側は 0 を含んでいる。一方 ', 1)' 側は 1 を含まないので $0.99\overbrace{\cdots}^{\text{無限}}$ はこの範囲に含まれない。含まれるのは $0.99\overbrace{\cdots 9}^{\text{有限}}$ までだ。角カッコと丸カッコはその区別のために使い分けている。

いま宇宙の大きさを [0, 100) とし黒くて太い 1 を [1, 0) としておこう。するといずれレイは圧縮を 100 回繰り返して [0, 1) をつなげ宇宙の大きさ [0, 100) と同じにするだろう。そしてレイは魔法で $\overbrace{[0,\ 1)[0,\ 1)\cdots[0,\ 1)}^{[1,\ 100)}$ を [0, 1) へ '再圧縮' するのだ。これが黒々としたぶっとい 1 である。



そして同じことを繰り返せば終わることなくいつまでも続く。レイは永久に '9' を書き続けられるのだ。'声' の出番は永久にやってこない。だとしたら $0.999\cdots$ が『1 じゃない』わけがない。つまり 1 だ。

> 実は前述の収束に関する定義はレイと '声' とのやり取りそのものである。以下を [定義] と読み比べるとよい。
>
> '声' がどんなに小さい $\epsilon\,(=0.\overbrace{00\cdots1}^{N\text{ 桁}})$ をとってもレイが書いたある桁数 N の存在より大きい桁数 n まで '9' を書くならば $a_n\ (=0.\underbrace{\overbrace{99\cdots9}^{N\text{ 桁}}9}_{n\text{ 桁}})$ と $\alpha\ (=1)$

は $|a_n - \alpha| < \epsilon$

$$\boxed{\text{すなわち}\quad |0.\underbrace{\overbrace{99\cdots9}^{N\text{ 桁}}9}_{n\text{ 桁}} - 1| < 0.\overbrace{00\cdots1}^{N\text{ 桁}}}$$

となる。よって a_n は $n \to \infty$ のとき α に収束する。

数学者の目で見れば間違いなく $0.999\cdots = 1$ なのである。