10 コンピュータ仕様に改造

驚いたことに $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots$ であることが分かったのはよいが、とてもじゃないが計算にならないことも判明した。このままでは式は役に立たない。もし、この式を利用するなら何らかの工夫が必要だ。そうでなければ別の方法を探すしかない。幸いにもこの式は役に立つ。それはジョン・マチンが見つけた[*1]。

$\tan\theta=\dfrac{1}{5}$ となる角 θ があるとする。ここで、三角関数の加法定理から派生する 2 **倍角の式**を利用する。$\tan$ に関しては $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}$ がそうだ。これぐらいは導いておきたい。

まず、$\sin$ と $\cos$ の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を思い出そう。この比をとれば

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

であり、左辺は $\tan(\alpha+\beta)$ と書き直せる。また、右辺の分子・分母を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ってみよう。$\tan=\dfrac{\sin}{\cos}$ であることを考えれば、この比が

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

と変形できることが分かるはずだ。$\alpha=\beta=\theta$ に置き換えると $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}$ が現れる。これが $\tan$ の 2 倍角の式だ。ついでだから、$\sin$、$\cos$ の 2 倍角の式も示しておく。

□ 三角関数の 2 倍角の式

- $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos 2\theta=(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2$
- $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}$

---

2 倍角の式で $\tan\theta=\dfrac{1}{5}$ として

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}=\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}=\frac{5}{12}$$

がすぐに計算できる。この手順を θ を 2θ に代えてもう一度やってみると

$$\tan 4\theta=\frac{2\tan 2\theta}{1-(\tan 2\theta)^2}=\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2}=\frac{120}{119}$$

[*1] John Machin (1685–1751)：イギリスの天文学者。

である。

一方で $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ であったことを思い出してほしい。つまり、$\tan 4\theta$ と $\tan\dfrac{\pi}{4}$ は非常に近いのだ。その差はどれぐらいだろうか。計算すると

$$\tan\left(4\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 4\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\cdot 1}=\frac{1}{239}$$

だけの差になってることが分かる。逆関数で表せば、$\tan^{-1}\dfrac{1}{239}=4\theta-\dfrac{\pi}{4}$ である。この式に、$\tan\theta=\dfrac{1}{5}$ より $\theta=\tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ を代入して移項すると

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

という関係式が導かれることとなる。

$\tan^{-1}x$ は何だったろうか。

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots$$

であった。ならば、ここに $x=\dfrac{1}{5}$ と $x=\dfrac{1}{239}$ を代入してやればよい。そうすると導かれた式が

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{239^7}+\cdots\right)$$

に化ける[*2]。

これは元の式に比べると、**収束**が格段に速いのでコンピュータに計算させるにはもってこいなのだ。**PowerShell** で計算してみよう。計算の前に、スクリプトを書きやすくするため

$$\pi=\left(\frac{16}{5}-\frac{4}{239}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{16}{5^3}-\frac{4}{239^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{16}{5^5}-\frac{4}{239^5}\right)-\frac{1}{7}\left(\frac{16}{5^7}-\frac{4}{239^7}\right)+\cdots$$

と変形しておこう。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > $p = 0; $m = 5; $n = 239; foreach ($i in 1..10) {
>> if (($i % 2) -eq 0) {$p -= 1 / (2 * $i - 1) * (16 / $m - 4 / $n)}
>> else {$p += 1 / (2 * $i - 1) * (16 / $m - 4 / $n)}}
>> $m *= 25; $n *= 57121
>> }
>>
PS C:\Users\Yours > $p
3.14159265358979
```

*2 以上の手順は「π の歴史（ペートル・ベックマン著）蒼樹書房」より抜粋。

スクリプト中にある数値 57121 は $239 * 239$ のことだ。よって 25 も $5 * 5$ であることが分かる。いまは、スクリプトを直接入力しているはずだから、入力の手間を省くつもりでそう書いただけである。ちなみに、随所に空白を空けて書いているが、入力が手間と思えば空白は入力しなくてよい。

今度のスクリプトでは 10 万項もの計算をせず、わずか 10 項の計算で正確な値になっている。この精度なら、実際には 10 項でも多すぎるぐらいだ。ただし、これはあくまでも **PowerShell** の有効桁数の範囲での話だ。私たちの目的地は、1 万桁の π の正確な値なのである。しかし、基本はいまの計算方法でよいので、あとは正確な計算をする工夫をどうするかである。