9　π の級数計算

純粋に $y=\tan^{-1}x$ について考えることにする。これは逆関数で表現されているが、さらにこの逆関数を求めると $x=\tan y$ である。逆の逆は元に戻る。この両辺を y で微分してみよう。つまり x と y の立場を交換して微分するのである。その結果は公式の x と y を交換した $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{(\cos y)^2}$ である。

これまで微分の記号には $\dfrac{dy}{dx}$ を用いてきたが、もともと微分とは平均的な変化量 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ を $\Delta x\to 0$ で考えたものである。変化量は比であるから $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\quad(\Delta y\to 0)$ と見ても本質的に変わらない。比の取り方を逆にすると、$\dfrac{dy}{dx}=(\cos y)^2$ である。

ところで、三角関数の関係式によると

$$(\tan y)^2=\frac{(\sin y)^2}{(\cos y)^2}=\frac{1-(\cos y)^2}{(\cos y)^2}=\frac{1}{(\cos y)^2}-1$$

であるから $(\cos y)^2=\dfrac{1}{1+(\tan y)^2}$ である。これで $\dfrac{dy}{dx}=(\cos y)^2=\dfrac{1}{1+(\tan y)^2}$ とつながった。

さらに $\tan y=x$ であったから、結局 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$ になる。y を $\tan^{-1}x$ に書き換えて

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$$

である。これで $\tan^{-1}x$ を微分することができた。

$\dfrac{1}{1+x^2}$ を実際に割り算してみよう。

$$
\begin{array}{cc|ccccc}
 & & 1 & -x^2 & +x^4 & -x^6 & +\cdots \\ \cline{3-7}
1+x^2 &) & 1 & & & & \\
 & & 1 & +x^2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -x^2 & & & \\
 & & & -x^2 & -x^4 & & \\ \cline{4-5}
 & & & & x^4 & & \\
 & & & & x^4 & +x^6 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & -x^6 & -x^8 \\
 & & & & & & \cdots
\end{array}
$$

これより

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

である。いよいよ視界が開けてきた。この旅一番の名所は目前だ。式の左辺は $\tan^{-1}x$ を微分した式だから、積分すれば $\tan^{-1}x$ である。微分したものを積分すれば元に戻る。左辺を積分するなら右辺も積分しなければならない。積分の法則は少し前に見ただろう。その結果

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots$$

という式が出来上がった。これを見ているだけでは景観のすばらしさは分からないかもしれない。$x=1$ を代入してみよう。ただし $\tan^{-1}1=\dfrac{\pi}{4}$ なる拡大鏡が必要だ。やった、

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

が見えた。円周率が分数の計算でできるんだ。もっとも無限の**級数**を計算しなくてはならないけれど。ちなみに、規則性のある**項**を無限に足した式を級数という。

無限級数であることを無視すれば、この程度の計算は小学生にもできる。さすがに、1 万桁もの計算を小学生にやってもらうわけにはいかないので、ふつうはコンピュータにやってもらうことになる。目的地までもうすぐだ、と思ったらそれは甘い見通しである。なぜなら、円周率の値を 1 万桁出したければ、少なくとも $\dfrac{1}{(1\text{万桁の数})}$ の項まで計算しなくてはならない。それはどのくらい先にあるんだろう。分母は奇数だけだから、項数は (1 万桁の数) の半分である。だからって 5000 じゃないよ。(1 万桁の数) を半分にしても、それは (1 万桁の数) でしかない。運がよくて (9999 桁の数) になるだけだ。

1 万桁の数というのは 10^{10000} はある。つまり、コンピュータが計算するにしても最低 10^{10000} 回は計算しなくてはならない。コンピュータの計算速度を表す単位に "MIPS (million instuructions per second)" というのがある。1 秒間に 100 万回、すなわち 10^6 回の命令が実行できるということだ。 ここでは 10^6 回の計算ができると読み替えておこう。かりに、そのさらに 100 万倍の速度で計算できるコンピュータがあったとしよう。それで 1 秒間に 10^{12} 回の計算ができることになる。この速度で 10^{10000} 回の計算を繰り返すと、かかる時間は $10^{10000}\div10^{12}$ 秒である。

$10^{10000}\div10^{12}$ の計算は $10^{10000\div12}$ じゃないよ。$a^5\div a^2$ であれば $\dfrac{aaaaa}{aa}=10^3=10^{5-2}$ のことだから $10^{10000}\div10^{12}=10^{9988}$ である。じゃあ 10^{9988} 秒って何年だ？

さて困った。円周率の計算がコンピュータでさえ何億・何兆年もかかるのでは、せっかくの式も宝の持ち腐れというものである。それを承知で、ちょっとだけ **PowerShell** に計算させてみよう。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > $p = 0; foreach ($i in 1..10000) {
>> if (($i % 2) -eq 0) {$p -= 1 / (2 * $i - 1)}
>> else {$p += 1 / (2 * $i - 1)}
>> }
>>
```

今度は、パイプラインを通さずに `foreach` 文を使っている。今回の計算では、交互に足したり引いたりする必要があるので `if` 文で分岐させている。その判断は、偶数番めの項か奇数番めの項かなので、`$i` が 2 で割れるかどうかをもとにしている。等しいことの記述に`-eq` を使うのが変わっている。**PowerShell** では、比較

演算子に`-eq`や`-lt`などが使われる。さあ、これで`$p`には $\frac{\pi}{4}$ の値が入った。`4*$p`と打ち込んで π の値を表示させてみよう。

[ps script]
```
PS C:\Users\Yours > 4*$p
3.14149265359003
```

あ〜！小数点以下 4 桁めが 5 だったらなあ、と思うかもしれない。そうなら、有効桁で 11 桁めまで正しい値になっているのに。計算量を 10 倍にしてみよう。

[ps script]
```
PS C:\Users\Yours > $p = 0; foreach ($i in 1..100000) {
>> if (($i % 2) -eq 0) {$p -= 1 / (2 * $i - 1)}
>> else {$p += 1 / (2 * $i - 1)}
>> }
>>
PS C:\Users\Yours > 4*$p
3.14158265358972
```

今度は、あ〜！小数点以下 5 桁めが 9 だったらなあ、と思うだろう。そうなら、有効桁数は 14 だ。でも、冷静に考えよう。純粋に正しい有効桁は 5 桁までである。10 万項も計算して、まだそれだけなのだ。