8 積分

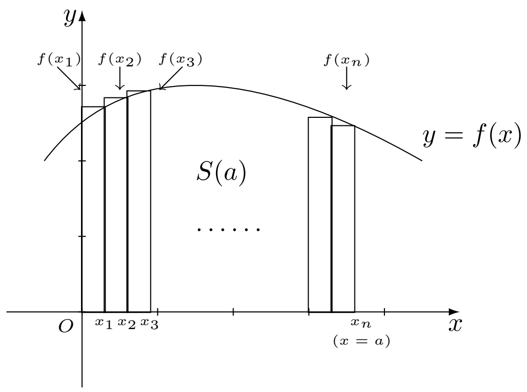
$y = \tan x$ の話題が長くなって、この先本当に円周率を求める地に到着できるのか気にかかっている頃だろう。安心してほしい。いまはトンネルの中にいるようなものだから。

$y = \tan x$ という関数は x の値を入力すると y の値を返す。$x = \dfrac{\pi}{3}$ を入力すれば $\sqrt{3}$ が返ることは以前話したとおりである。ならば、逆に y の値を入力して x の値を知ることはできるだろうか。$y = \sqrt{3}$ を入力すると $x = \dfrac{\pi}{3}$ を返すことは昔話どおりだ。では、$y = 3$ を入力すると x が何を返すかと問われたら困るだろう。このように、ある関数の y の値から x の値を求めるために**逆関数**を考えることがある。単純な例では、関数が $y = 2x$ なら $x = \dfrac{y}{2}$ だし、$y = x^2$ なら $x = \sqrt{y}$ ということはすぐ分かる。

ところが $y = \tan x$ ともなると、"$x =$" に続く式を y の式として表すことは簡単ではない。しかし、そういう機能をもった何らかの操作ができることは、$y = \tan x$ のグラフを見ても明らかなことである。関数の逆方向の値を求めることはできても、直接そのような式を作れないのはもどかしい。そういう場合は、好むと好まなざるに関わらず新しい記号を導入するものである。逆関数の意味で使う記号は "${}^{-1}$" である[*1]。tan の逆関数であれば $\tan^{-1}$ と書く。よって、$y = \tan x$ は $x = \tan^{-1} y$ に書き直すことができる。例を挙げれば、$1 = \tan \dfrac{\pi}{4}$ であるから $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1$ である。なお、この例はあとで重要な鍵になる式でもある。

円周率の旅も半ばにさしかかってきた。円周率の計算に関連している関数が $y = \tan x$ であることは再三述べている。微分も述べた。しかし、微分とはごく微小の区間の解析なので、それだけでは関数の精密な様子は分かっても、円周率である半円周の長さにはほど遠い。長さを測るにはそれを集めなくてはならない。

ものを集める計算に**積分**という考えがある。ここでは積分の考えの基礎となる事柄を述べてみよう。



モデル図を見る限り、気難しい世界に立ち入ってしまった気になる。たしかに、用いる式は複雑になりがちだが、考え方は思ったより単純だから安心してほしい。積分とは、関数 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の

*1 $^{-1}$ は "インバース（*inverse*）" と読む。

面積を求める計算だと思ってもらえばよい。図は、$x=0$ から $x=a$ にかけて囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めるという想定である。求めたい図形はゆがんでいて、面積の計算は簡単ではないので、区間 $[0,\ a]$ を n 等分して長方形の面積の総和で近似しようというわけだ。

式を持ち出しておこう。区間 $[0,\ a]$ を n 等分した各点をそれぞれ $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$ とすると、これらを $y=f(x)$ に代入した値 $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots,\ f(x_n)$ は各長方形の高さ（縦の長さ）である。また長方形の底辺（横の長さ）は、区間 $[0,\ a]$ の n 等分であるから一定の幅 $\dfrac{a}{n}$ である。$\dfrac{a}{n}$ は非常に小さい値を想定しているので、微分でも使った記号 Δx で代用しよう。よって、最初の長方形の面積は $f(x_1)\Delta x$ で、最後の長方形の面積は $f(x_n)\Delta x$ である。以上より、曲線で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は、近似値ではあるが

$$\begin{aligned}S(a) &\approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\end{aligned}$$

と書き表せる。

ここで、新たな記号を導入した。いくつかの項を足す場合、項数が多いほど記述に苦労するし、どうしても "$\ldots$" などの省略形を用いざるをえない。とくに、いま求めた式はどの項も似たり寄ったりで、違いといえば添え数の $_1,\ _2,\ _3,\ \ldots$ ぐらいのものだ。そこで、これを簡略化するために記号 $\sum$ を使うことにする[*2]。おかげで、わずか 1 項ですべての和を表すことができるのだ。

これで、曲線で囲まれた図形の面積を近似する式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ が分かったのだが、このままでは近似値にすぎない。正確な値を知りたいなら、分割をもっと細かくする以外にない。分割を細かくするというのは $n\to\infty$ の状態、言い換えれば $\Delta x\to 0$ の状態を指す。それで正確な面積 $S(a)=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\Delta x \quad (\Delta x\to 0)$ になるのである。

$n\to\infty$ を想像するのは難しいかもしれない。こうなると分割という概念では済まされないからである。したがって、$f(x_i)$ などと区別して書くことはできないので、$f(x)$ のまま記述しておこう。また、$\Delta x\to 0$ の状態も "幅" を想像しがたいので、dx と書き換えておこう。これを、関数 $y=f(x)$ の区間 $[0,\ a]$ における**定積分**と呼び、$S(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ と書くのである。

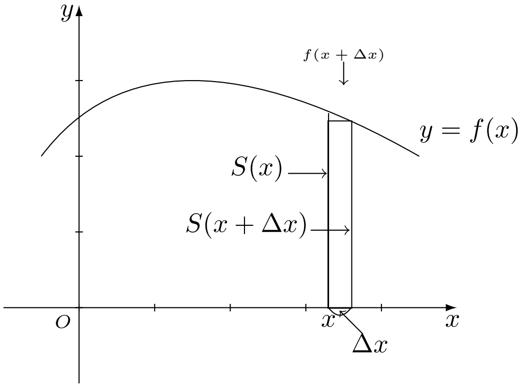
□ **定積分の定義**

- 関数 $y=f(x)$ を、区間 $[0,\ a]$ について n 分割した総和 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$ の極限（$n\to\infty$）を $y=f(x)$ の区間 $[0,\ a]$ における定積分といい、$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ と表す

さて、定積分の計算において区間を定めると、それで一定の数値が求められ、それが関数 $y=f(x)$ と x 軸

[*2] $\sum$ は "シグマ" と読む。

とが囲む図形の面積になる。もし、区間を不定な区間 $[0,\ x]$ にすると、定積分の計算が x の関数となり、変化をとらえやすくなる。



たとえば、原点から x 軸の任意の場所までの区間で、$f(x)$ と x 軸とで囲まれる面積を表す関数を $S(x)$ で定義する。すると、そこから少しはみ出た—正確には Δx だけ増加した—場所の面積は $S(x+\Delta x)$ で求められる。この差 $S(x+\Delta x)-S(x)$ は当然、はみ出た長方形の面積であるから $f(x+\Delta x)\Delta x$ である。よって $S(x+\Delta x)-S(x)=f(x+\Delta x)\Delta x$ なのだが、両辺を Δx で割って

$$\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(x+\Delta x)$$

としておこう。さあ、ここは見事な景勝地である。じっくり見てもらいたい。

$\Delta x\to 0$ の状態を考えよう。その場合、左辺は $S(x)$ の微分になるので $\dfrac{d}{dx}S(x)$ と書いてよい。一方、右辺は $f(x)$ である。ということは $\dfrac{d}{dx}S(x)=f(x)$ である。$f(x)$ を積分したものが $S(x)$ で、今度は $S(x)$ を微分したものが $f(x)$ となった。なんと、微分と積分は互いに逆演算の関係なのだ。

□ 微分と積分の関係

- $\displaystyle\int f(x)\,dx=S(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{d}{dx}S(x)=f(x)$

微分の例をいくつか挙げてみる。$\dfrac{d}{dx}(x^2)=2x$、$\dfrac{d}{dx}(x^3)=3x^2$、$\dfrac{d}{dx}(x^4)=4x^3$ などである。たとえば $\dfrac{d}{dx}(x^2)=2x$ となることは、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\quad(\Delta x\to 0)$$

を計算すれば簡単に分かるので、詳細は省いておく。

そして、微分の逆演算が積分なので、これら右辺の式を積分すれば $\dfrac{d}{dx}(\ )$ 内の式に戻ることになる。このことから $\displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$、$\displaystyle\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}$、$\displaystyle\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}$ などが見えてくる。すばらしい。