7 微分

$y = \sin\theta$ に関して $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ $(\Delta x \to 0)$ の結果に関心が移ってきた。ところで、この旅の円周率の計算には tan が関与している。そこで、$y = \tan\theta$ に関する平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ を計算することにしよう。それは $\dfrac{\tan(a+\Delta x) - \tan a}{\Delta x}$ $(\Delta x \to 0)$ の計算ということになる。$\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ であったことを思い出してほしい。これより

$$\begin{aligned}\frac{\tan(a+\Delta x) - \tan a}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\sin(a+\Delta x)}{\cos(a+\Delta x)} - \frac{\sin a}{\cos a}\right)\\ &= \frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\sin(a+\Delta x)\cos a - \cos(a+\Delta x)\sin a}{\cos(a+\Delta x)\cos a}\end{aligned}$$

となる。

さて、ここで分子にある長ったらしい式は、三角関数の加法定理のひとつを当てはめることができる。$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$ であることを利用すると、式の続きは

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\sin\{(a+\Delta x) - a\})}{\cos(a+\Delta x)\cos a}\\ &= \frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\cos(a+\Delta x)\cos a}\\ &= \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos(a+\Delta x)\cos a}\end{aligned}$$

までくる。

加法定理の証明は $\sin(\alpha+\beta)$ でしただけで、$\sin(\alpha-\beta)$ の証明はしていない。しかし、似たような証明を繰り返しても仕方ないので、関係式が正しいことは **PowerShell** で確認しておこう。そして、後のために **PowerShell** の関数機能を利用しよう。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > function sinsub($a, $b) {
>> [math]::sin($a) * [math]::cos($b) - [math]::cos($a) * [math]::sin($b)
>> [math]::sin($a - $b)
>> }
>>
```

PowerShell では、同じ計算式で数値を変えて何回か計算させる場合、関数を定義するとよい。ここでは、`$a`, `$b` を変数とする関数 `sinsub` を定義した。関数には 2 種類の計算式を記述しただけで、計算結果を表示する命令がないことに気づくだろう。これは **PowerShell** の優れた面でもあり、注意を要する面でもある。

この場合の関数は `sinsub($a, $b)` であるから、計算の際の入力は `sinsub 60 30` のようにする。$\sin 60^\circ\cos 30^\circ - \cos 60^\circ\sin 30^\circ = \sin(60^\circ - 30^\circ)$ の確認のため、`sinsub 60 30` と入力してみよう。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > sinsub 60 30
-0.988031624092862
-0.988031624092862
```

2 種類の計算結果は同じ値を返したものの、なぜか負の値が出てしまった。どうして？ 実は、**PowerShell** で使う角度は “度” ではなく “弧の比” である。だから $\sin(60^\circ - 30^\circ)$ を確認したければ、`sinsub ([math]::Pi/3) ([math]::Pi/6)` と入力しなくてはならない。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > sinsub ([math]::Pi/3) ([math]::Pi/6)
0.5
0.5
```

今度は正しい結果になった。

さて、加法定理の確認の前に戻ろう。そこで得られた結果は、平均変化率であって極限ではないので、さらに $\Delta x \to 0$ の状態を考えなくてはならない。とはいっても計算上は $\Delta x = 0$ の代入で済ませられるのだが。このとき、$\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to 0)$ であったことも思い出してほしい。θ を Δx と書き換えても本質は同じなので $\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0)$ である。以上から分かることは

$$\frac{\tan(a+\Delta x) - \tan a}{\Delta x} = \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos(a+\Delta x)\cos a} = \frac{1}{(\cos a)^2} \quad (\Delta x \to 0)$$

ということだ。

このことは、$y = \tan x$ という関数が $x = a$ の場所において、その平均変化率の極限が $\dfrac{1}{(\cos a)^2}$ で計算できることを意味している。具体的に $a = 0$ を考えると、そこでの平均変化率の極限は 1 になる。関数 $y = x$ の平均変化率が常に 1 であることを考えると、$x = 0$ の付近では $y = \tan x$ も $y = x$ も同じ変化量であることが分かるのだ。

さて、いま $y = \tan\theta$ の代わりに $y = \tan x$ と書いた。これは、平均変化率の計算は、何も $\theta = a$ に限らず $\theta = b$ でも $\theta = c$ でも一向にかまわない。つまり任意の値に対して成り立つ関係であるから、$y = \tan x$ という関数全体にわたって成立している。ということは

$$\frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x} = \frac{1}{(\cos x)^2} \quad (\Delta x \to 0)$$

である。このように、関数全体に対して各点の平均変化率の極限を求める式を導いておくことは、いろいろな面で便利である。そのような関数式は**導関数**と呼ばれ、導関数を導く操作を**関数を微分する**という。

□ **微分の定義**

- 平均変化率の極限、$\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)$ を関数 $f(x)$ の微分という

とくにここでの関数 $y = \tan x$ は x を変数とする関数で、その x のごく微小な変化について導関数を導いているので、$\tan x$ を x で微分したことになる。微分を表す記号は $\dfrac{d}{dx}$ を使う。よって、$\tan x$ を微分して $\dfrac{1}{(\cos x)^2}$ になることは $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$ と書けるのである。また、$y = \tan x$ なので $\dfrac{d}{dx}y = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$ や $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$ に書き直すことも多い。

平均変化率と微分を対比させるには $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$ の書き方が便利だ。なぜなら、$y = \tan x$ に関して、任意の x における平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cos x}$$

と書け、$\Delta x \to 0$ の極限—計算上は $\Delta x = 0$ の代入—が微分であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

となっている。微分の背景に極限があっても、0 の代入という形式的計算で済ますことができて便利なのである。

□ $\tan x$ **の微分**

- $y = \tan x \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$

ところで、旅の行程が円周率から逸れていくように思えるだろうが安心してもらいたい。いばらの道を当分の間歩くけれど、その後視界が急に開ける。それまでの辛抱である。