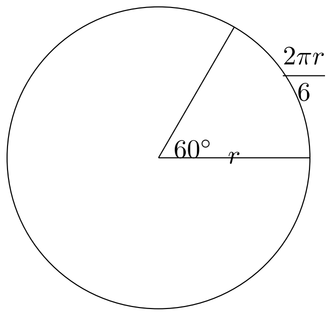
6 関数の極限

旅の途中にどうしても立ち寄らなくてはならない場所があるので付き合ってもらいたい。角度の表し方である。人によっては一周を 360 等分することに違和感を抱くことがあるようだ。生活上の便宜から、そのような分割に至ったと考えられているが、その点は追求しないでおこう。追求したいのは "°" である。この単位の正体って何？

関数 $y=\tan\theta$ を例にとってみよう。$\theta=60°$ のとき $y=\sqrt{3}$ であることは前に述べた。$\sqrt{3}$ は比の値である。この関数は、正体不明の単位をもつ値を代入すると比の値が返されるのだ。(道のり) = (速さ) × (時間) の関係から分かるように、関数では左辺と右辺の単位は揃っているものだ。なぜなら (道のり) の単位 "m" に対して速さの単位 "m/s" と時間の単位 "s" の積が等しくなっている。単位は揃っている方が気分が良いので、できれば正体不明の角 θ の単位は "比" であってほしい。

この場合、次のような考えが有効である。



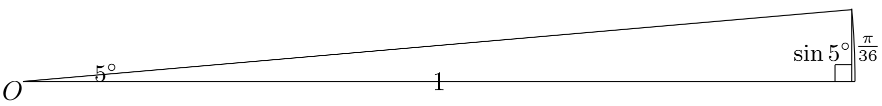
円周の長さというものは、円の半径によって変わってくる。円周率をギリシャ文字の π で表せば、たとえば半径 r の円では円周の長さは $2\pi r$ だ。したがって、60° の角に対する**弧**の長さは、円周の $\dfrac{1}{6}$ であるから $\dfrac{2\pi r}{6}$ である。しかし、ここで弧の長さではなく、半径に対する弧の比を考えれば $\dfrac{2\pi r}{6}:r=\dfrac{\pi}{3}$ である。つまり、角 60° には $\dfrac{\pi}{3}$ が対応する。$\dfrac{\pi}{3}$ は比の値だから、私たちが求めるものにぴったりだ。

ということで、今後は角度に使う値を "度" から "弧の長さと半径の比" に変えておきたい。慣れるまでは対応表を見ながら考えればよいだろう。また、負の角に対しては負の比を使うことにする。

$-60°$	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$	π

少し寄り道をしたけれど、実は重要な知識を手に入れたのである。以前、xy 座標に半径 1 の円を描いて三角関数のグラフを描く補助にしたことを覚えていると思う。いま手にした角度の表し方は、それと密接に関

わっている。弧の長さと半径の比が角度の値ということなら、半径が 1 の場合、比の値はすなわち弧の長さに等しい。結局、**角度を測ることは、半径 1 の円の弧の長さを測ること**でもあるわけである。これに $\sin\theta$ をからませよう。半径 1 の円に対して、$\sin\theta$ の値は y 座標の値—それは x 軸からの高さに等しい—であった。大きな角度では分からないだろうが、小さい角度の場合、その角度 θ—それは弧の長さである—と $\sin\theta$ の値が非常に近いことに気づくだろう。



目を凝らして図を見てもらいたい。半径 1 の円周上に 5° の角度を取っている。そこから真下に下ろした垂線の長さが $\sin 5^\circ$ である。その垂線のわずか右にある線は弧で、それは 5° に相当する角 $\dfrac{\pi}{36}$ だ。$\sin 5^\circ = \sin\dfrac{\pi}{36} = 0.087155743$ であり、$\dfrac{\pi}{36} = 0.087266463$ である。非常に近い値である。もっともこの計算は、円周率 π の計算を目的とした旅の途中で π の正確な値がよく分からないくせに、$\dfrac{\pi}{36}$ の値を計算しているところに矛盾があるが大目に見てほしい。むしろ、数値の近さでなく、直線と弧の近さに注目してほしいのだ。以前の話の蒸し返しになるけれど、小さな角に対する $\sin\theta$ の値を集めれば弧の長さを近似したことになるだろう。それこそ半円周の長さ、つまり円周率ということだ。

結局、次のことが分かった。θ がごくごく小さな値のときは $\sin\theta \approx \theta$ である。両辺を θ で割ると $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \approx 1$ なる関係式が現れる。ところで θ をごくごく小さくして、限りなく 0 に近づけることを θ の**極限**と呼び、$\theta \to 0$ と書く。このとき、$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ は 1 に近くなるので、$\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to 0)$ と書くことがある。この旅では、極限の表記は常にこれで通すつもりだ。

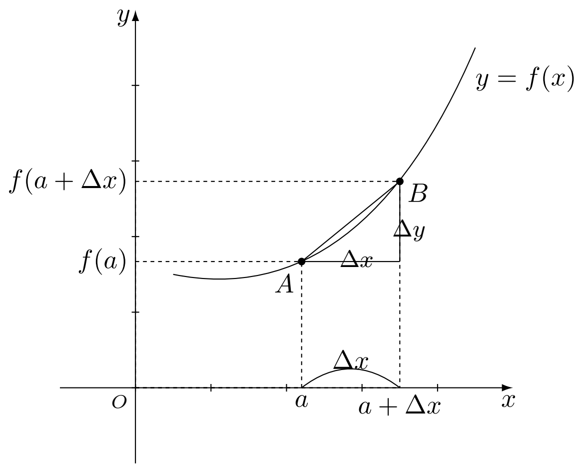
□ $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ **の極限値**

- $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to 0)$

小さい角に対する $\sin\theta$ の値を集めれば円周率の計算に役立つことが見えてきた。$y = \sin\theta$ は関数である。ということは、関数についての極限のことを知っておかなくてはならない。

ここでは三角関数に限らず、一般の関数を対象に考えておこう。ふつう、関数は $y = x^2$ とか $y = \sin x$ とか、x と y の関係式で表現することが多い。しかし、"$y =$" の先に書かれる x の式はその都度違っている。そこで、そういったものをひっくるめて、x を用いた関数（*function*）という意味で $y = f(x)$ と表すのが習慣だ。この書き方で x の値の変化をごくごく小さくして、関数の振る舞いを検証してみよう。

$y = f(x)$ がどんな関数か分からないので、モデル図を見ながら話を進めることにする。



いかにも数学的なややこしい図だ。順に説明しよう。

まず、$y = f(x)$ という何らかの関数がある。関数は、x にある値 a を代入すると y の値が返ってくる。そのことを意味する書き方が $y = f(a)$ である。式 $f(x)$ に値 a を代入して y の値になったことが、見てそれと分かる書き方だ。図では A の場所にあたる。$x = a$ の場所より少し増えた—少しの変化量を意味する記号を用いて Δx 分だけ増えた—場所は $x = a + \Delta x$ であるから、そのときの関数の値は $f(a + \Delta x)$ となる[*1]。図では B の場所にあたる。

では、A から B までに関数はどのような変化をしているのだろう。図を見る限り関数 $f(x)$ の変化は曲線的だし、もともと関数の具体的な式が分からないので、変化の様子を詳しく述べることはできない。しかし、**平均変化率**でよければ簡単に求められる。それは、A から B までの途中は無視して、両端の情報だけをもとに計算してしまえばよい。計算方法は $\dfrac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ で十分である。この計算で A から B までの平均的な変化が分かる。平均的な変化とは、直線的な変化を意味するので、図の線分 AB がこれにあたる。計算にいまの表記を使うなら $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ ということである。

□ **平均変化率の定義**

- 関数 $y = f(x)$ について、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ を、$x = a$ における平均変化率という

もう一息だ。図では、少しの Δx を増やしたといっても、直線の変化と曲線の変化にはだいぶ違いがある。図の隙間がそれを物語っている。もし、Δx の量がもっともっと小さければどうだろう。おそらく、以前 $\sin\theta$ と θ との関係で見たように、直線と曲線の隙間はほとんどなくなるはずである。これこそ私たちが求めている極限なのだ。つまり、いま知りたいのは $\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \to ?\quad (\Delta x \to 0)$ の結果 “？” なのである。

[*1] Δ は “デルタ” と読む。