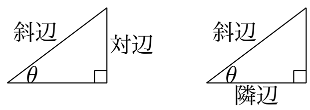
5 三角関数

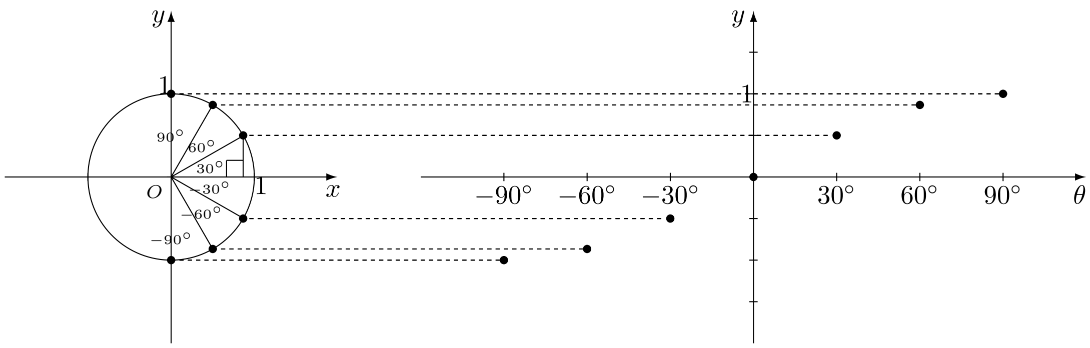
関数 $y=\tan\theta$ が登場したところで、あと 2 つの関数にも登場してもらわなくてはならない。tan は直角三角形の比、(対辺) : (隣辺) を用いた。当然、他の辺の比を用いることもできる。斜辺を組み合わせた (対辺) : (斜辺) と (隣辺) : (斜辺) である。そこで、$\sin\theta=\dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$、$\cos\theta=\dfrac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$ と定義しておこう[*1]。

□ $\sin\theta$、$\cos\theta$ **の定義**

- $\sin\theta=\dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$
- $\cos\theta=\dfrac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$



これより、$y=\sin\theta$ と $y=\cos\theta$ なる関数ができる。ただし、これらも $y=\tan\theta$ 同様に θ の値を代入して y の値を計算するわけにはいかない。しかし、グラフを描くことは比較的やさしい。たとえば $y=\sin\theta$ のグラフを描いてみよう。

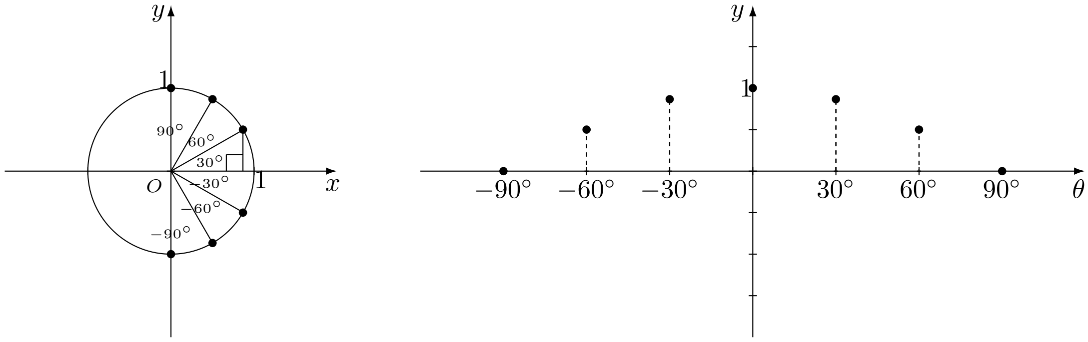


グラフを描くには、まず左の補助座標を使い適当な角度で線を引くまでは tan の場合と同じだ。ただ、今度はそれが円周と交わる位置を求める。その位置が、適当な角度に対する sin の値である。なぜって、sin の定義は $\dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$ だったけど、この場合、斜辺は常に 1 なので対辺の値—直角三角形の高さである y—が sin の値になるからである。それさえ分かれば、その高さを右の xy 座標の適当な角度に対する場所に移してあげればよい。図にいくつかの値を記入してみると、直線状に点があるように見えるものの、よく見ると緩やかに S 字状に曲がっていることが分かるはずだ。

そうすると $y=\cos\theta$ のグラフも描くことができる。cos の定義は $\dfrac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$ で、斜辺は常に 1 なので隣辺の値—

*1 sin は "サイン"、cos は "コサイン" と読む。

すなわち x の値—が cos の値になる。グラフに描く際には注意が必要だ。補助座標の x の値が正規の θy 座標の y の値になるので、補助座標の x の長さだけ正規の座標に立てるようにして描かなくてはならない。

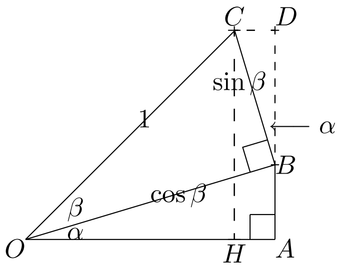


ここで、これら**三角関数**の重要な性質を述べよう。まず、$\tan\theta = \dfrac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$、$\sin\theta = \dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$、$\cos\theta = \dfrac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$ と定義していたが、ここで $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ の比を作れば、それは $\tan\theta$ の比と同じになっていることに気づく。つまり、$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ である。また、グラフを描く際に注意したことがら、つまり補助座標において $\sin\theta$ の値は y の値に等しく、$\cos\theta$ の値は x の値に等しかったことを思い出そう。y と x は、斜辺を 1 とする直角三角形の対辺と隣辺でもあるので、三平方の定理から $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$ であることも分かる。これら 2 つの関係式は、今後円周率を計算する際に重要な役割を担うことになる。

□ sin, cos, tan **の関係**

- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

円周率の計算に重要な関係式がもうひとつある。昔の話を蒸し返すようで悪いが、$\sqrt{\ }$ の計算は一筋縄ではいかない。一般に $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ である。あえて書くなら、$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ だ。まあ、さほどかっこいい式ではない。同様に、三角関数でも $\sin\alpha + \sin\beta \neq \sin(\alpha+\beta)$ である。では、正しい式は何だろう。$\sin\alpha + \sin\beta$ の正確な計算をしてみよう。



図は少々ややこしい。直角の他に角 α をもつ $\triangle OAB$ の斜辺の上に、角 β をもつ $\triangle OBC$ を乗せている。

$\triangle OBC$ の斜辺の長さは 1 とする。三角関数の定義より $OB = \cos\beta$、$BC = \sin\beta$ であることはすぐ分かる。ここで $\triangle OAB$ に目をつける。すると三角関数の定義より $\sin\alpha = \dfrac{AB}{\cos\beta}$ だから $AB = \sin\alpha\cos\beta$ が分かる。続いて $\triangle BDC$ にも目をつける。$\angle B = \alpha$ であることに注意してもらいたい。同じく $\cos\alpha = \dfrac{BD}{\sin\beta}$ だから $BD = \cos\alpha\sin\beta$ も分かる。

さて、$AB + BD$ の長さは CH に等しいが、CH は定義から $\sin(\alpha+\beta)$ である。よって、$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ という関係が見えたことになる。これは、**三角関数の加法定理**と呼ばれ、多くの種類の等式が公式として知られている。cos の加法定理も同じような手順で導けるので、とりあえず sin と cos の加法定理を挙げておこう。

□ 三角関数の加法定理

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$