4 円から一歩離れて. . .

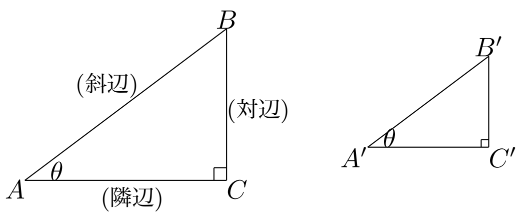
円周率の計算を何万桁もしようとすると、どうしても精度の問題が絡んでくる。新たな考えが必要になってきた。

三平方の定理だけでは限界があるようなので、別の視点から計算をすることにしよう。別の視点といっても、三平方の定理は強力な武器である。見方を少し変えることにしたい。

ところで、三平方の定理の基本は直角三角形であるが、直角三角形の本質は何だろうか。直角三角形はひとつの角が直角だから、残り 2 つの角の和は 90° である。このことは、直角三角形では、直角以外のあるひとつの角の大きさが分かれば、形が確定するということだ。つまり、直角三角形はあるひとつの角が、直角三角形の形を決めるといってもよい。

ここでいう形が決まるの意味は、図形が**相似**であることをいう。対応する辺や角がすべて等しい合同と違い、相似は**対応する辺の比**が等しい図形である。対応する角の大きさは等しいので、拡大・縮小すれば合同になると言い換えてもよい。合同な図形では辺の長さが重要になるが、相似な図形では長さは重要な要素ではない。あくまでも比が重要なのである。

相似な直角三角形を考えよう。



θ が決まると辺の長さによらず

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} = y \text{ である}$$

直角でないひとつの角を θ とすると、対応する辺の比 y が等しくなる[*1]。対応する辺を BC と $B'C'$、AC と $A'C'$ にした場合、$\theta = 60°$ ならば $y = \sqrt{3}$ である。これは、正三角形の左半分に三平方の定理をあてはめれば計算できる。このように、θ の値をひとつ決めたとき、それに対する値 y がひとつ決まる関係を**関数**と呼ぶ。

自転車の台数 x と車輪の数 y の関係は関数になっている。常識的には、どの自転車にも車輪は 2 本あるので $y = 2x$ だ。高いところからものを落としたとき、経過時間 x 秒と落下距離 y m の関係も関数である。これは実験的に $y \approx 4.9x^2$ であることが知られている。関数は自分勝手に作ることだってできる。$y = x^2 - 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x+1}$ は立派な関数である。x の値をひとつ決めれば y の値がひとつ決まるからだ。

---

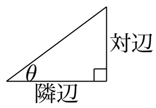
*1 θ は "シータ" と読む。角は x でもよいが後の都合で θ を用いた。

すると先の直角三角形においては、θ と y にどんな関係があるのだろう。ところが残念なことに、θ に分数やら $\sqrt{\ }$ やらを用いて多項式で表そうにも、うまい式が作れないのである。せっかく関数になっているのに、その式が作れないというのはもどかしい。それならということで、関数を定義してしまおう。

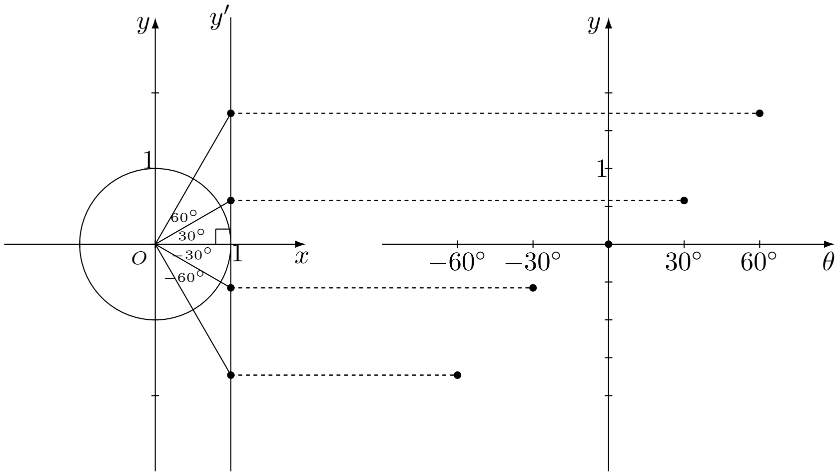
直角三角形の辺の比といっても、3 辺のうちどの 2 辺を選ぶかによって比の値も変わってくる。いまは、角 θ の向かいの辺—**対辺**と呼ぶ—と角 θ に隣接する（斜辺でない）辺—**隣辺**と呼ぶ—の比、(対辺) : (隣辺) を計算したので、θ の値を入力すると (対辺) : (隣辺) の値を出力する関数を定義しよう。その機能を有する関数を tan で定義する[*2]。慣れないと分かりにくいだろうが、$(\ )^2$ が 3 の入力に対して 9 を出力するように、$\tan(\ )$ は 60° の入力に対して $\sqrt{3}$ を出力する関数なのである。きちんと書けば、$y=\tan\theta$ において $\theta=60^\circ$ のとき、$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ ということである。

□ **$\tan\theta$ の定義**

- $\tan\theta=\dfrac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$



角度に対して辺の比が返ってくる関数は、つかみ所がない気がする。なんといっても θ の値を "代入して計算" できないのが困る。計算できなければ θ, y の関係をグラフにするのは困難と思われるが、これがそうでもないのだ。ただし、それには θy 座標の横に補助の座標系を必要とするけれど。



左側の補助座標は、xy 座標に半径 1 の円と $x=1$ の位置に縦線 y' を引いてある。右側は θy 座標で θ 軸の目盛りは "度" だ。グラフを描くには、まず左の補助座標を使い適当な角度で線を引いて、それが y' 軸と交わる位置を求める。その位置が、適当な角度に対する tan の値である。なぜって、tan の定義は $\dfrac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}$ だったけど、この場合、隣辺は 1 なので対辺の値、すなわち y' の値が tan の値になるのである。それさえ分かれば、そ

[*2] tan は "タンジェント" と読む。

の高さを右の θy 座標の適当な角度に対する場所に移してあげればよい。図にいくつかの値を記入してみると、直線状に点があるように見えるものの、よく見ると緩やかに逆 S 字状に曲がっていることが分かるはずだ。

ところで、tan が円周率の計算に役立つことが分かるには、まだまだ知らなければならないことが多い。ここから、長く険しい道のりが続くし、旅は始まったばかりである。