2　2 次方程式と三平方の定理

$x^2 = 9$ といった式を 2 **次方程式**という。ここでは、2 乗すると 9 になる x を探している。「$3 \times 3 = 9$（さざんがく）」と唱えれば分かるように、$x = 3$ である。ただし、$(-3) \times (-3)$ でも 9 になるので、$x = -3$ も解になっている。負の数は 2 乗すると正の数になるので、一般に $x^2 = (\text{何々})$ の解は $+, -$ の 2 値があることになる。では、$x^2 = 10$ の解はいくつであろう。九九を唱えて分かるように、同じ数を掛けてちょうど 10 になるものはない。3×3 では 9 にしかならないので、それより少し大きい数であることが予想できる。試しに、3.1×3.1 をやってみると 9.61 だ。少し足りない。3.2×3.2 にすると 10.24 だ。今度は少し大きい。3.15 ぐらいならどうだろう。

せっかくなので、ここらで **PowerShell** に計算をさせてみよう。**PowerShell** を起動すると、環境にもよるが、おおむね

```
PS C:\Users\Yours >
```

のようなプロンプトが表示される。3.15×3.15 の計算をしたければ “`3.15*3.15`” と打ち込めば即座に結果を返してくれる。

[ps script]

```
PS C:\Users\Yours > 3.15*3.15
9.9225
```

こんな風に試行錯誤を繰り返せば、2 乗して 10 になる数を探すことができそうだが、実際はどこまで計算してもちょうど 10 になる数は見つからない。8 桁電卓では、$3.1622777 \times 3.1622777$ がちょうど 10 と表示されるが、実際は $10.00000025 \cdots$ である。電卓計算には表示できる限界というものがある。限界を試すのに分かりやすいのは “$10 \div 3 \times 3 =$” とすることだ。正しい値は 10 だが 9.9999999 と表示される。しかし、$10 \div 3 = \dfrac{10}{3}$ と表現すれば正確きわまりない。2 乗して 10 になる数を正確に表現できないだろうか。

その目的のためには新たな記号が必要となる。2 乗して 10 になる数は**根号** $\sqrt{\ }$ を用いて $\sqrt{10}$ と表す。これは定義である。

□ 平方根の定義

- 2 乗して a になる数を $\sqrt{a}$ と表す

本当のことを言うと上の定義には不備がある。2 乗して 9 になる数は 3 と -3 であるように、2 乗して a になる数は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ である。さらに、普通の数は 2 乗すれば 0 かそれ以上になるので、$a \geq 0$ という条件も付く。しかしながら図形を考察している最中には、そのような細々したことはあまり考える必要がないので、

多少の不備には目をつぶって話が複雑化しないようにしておこう。

それなら、**PowerShell** は $\sqrt{10}$ に対していくつを返すのだろう。多くのプログラミング言語では、$\sqrt{\ }$ には `sqrt` を使うものだが、**PowerShell** でそのような数学関数を使うときは `[math]::`を頭に付ける規則になっている。つまりこうだ。

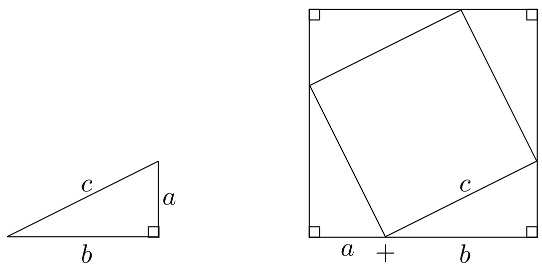
[ps script]
```
PS C:\Users\Yours > [math]::sqrt(10)
3.16227766016838
```

平方根に関する性質を述べておきたい。2 乗して ab となる数があればそれは $\sqrt{ab}$ であるから、$(\sqrt{ab})^2 = ab$ である。一方で $(\sqrt{a})^2 = a$、$(\sqrt{b})^2 = b$ は定義だから、辺々掛け合わせた $(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$ も言えるので、この時点で $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2$ が分かる。一般に $X^2Y^2 = (XY)^2$ と書けるので、これは $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ と書いてよい。2 乗して等しい数なら 2 乗する前も等しい。すなわち $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ が成り立つ。

□ 平方根の性質

- $(\sqrt{n})^2 = n$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

知識を貯えたところで次へ進もう。直角三角形は、直角の向かい側の辺を**斜辺**と呼ぶ。その長さを c としておこう。残りの 2 辺は、どちらが底辺と高さになってもかまわないので、ここではその長さを a と b としておく。そこで、同じ大きさの直角三角形を 4 枚用意して上手に組み合わせると、図のような正方形にすることができる。



このとき、外側の正方形の一辺の長さは $(a+b)$ であるから、その面積は $(a+b)^2$ である。さらに別の視点では、外側の正方形は 4 枚の直角三角形と中央の正方形の組み合わせでもあるから、面積を $\frac{1}{2}ab \times 4 + c^2$ で計算してもよい。どちらの計算でも同じ面積を表すから

$$(a+b)^2 = \frac{1}{2}ab \times 4 + c^2$$

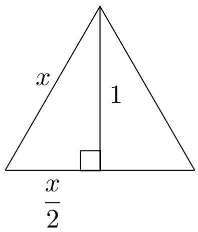
が成り立つ。これを整理して $a^2 + b^2 = c^2$ が得られる。**合同**な 4 枚の直角三角形であれば、図のように組み合わせて必ず正方形を作ることができる。それは、この関係式がどんな形の直角三角形についても成立するこ

とを意味する。**三平方の定理**の名で知られる性質である。

□ 三平方の定理

- 直角三角形の斜辺を c、他の 2 辺を a、b とすると
  $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ

これでようやく高さが 1 である正三角形の一辺の長さの計算に入れる。



求めたい正三角形の一辺の長さを x とすると、斜辺が x、底辺が $\dfrac{x}{2}$ そして高さが 1 の直角三角形ができる。ここに、三平方の定理を当てはめて、

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1^2 = x^2$$

である。これは次のようにして解く。

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{4} + 1 &= x^2 \\
x^2 + 4 &= 4x^2 && \text{（両辺を 4 倍した）} \\
3x^2 &= 4 && \text{（移項して整理した）} \\
x^2 &= \frac{4}{3} && \text{（両辺を 3 で割った）} \\
x &= \sqrt{\frac{4}{3}} && \text{（平方根の定義より）}.
\end{aligned}$$

これで高さが 1 である正三角形の一辺は $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ であることが分かった。8 桁電卓で計算してみると、およそ 1.1547005 である。3 倍すれば、円の回りを囲む正 6 角形の半周分の長さになる。それは 3.4641015 だ。半円周の長さ L はこの値より短いので $L < 3.4641015$ である。これに先の結果を合わせると、$3 <$ (円周率) < 3.4641015 が分かる。これだけ苦労した割に、円周率が 3.1 だか 3.2 だか 3.3 だか 3.4 だか定まらない。何てこった。