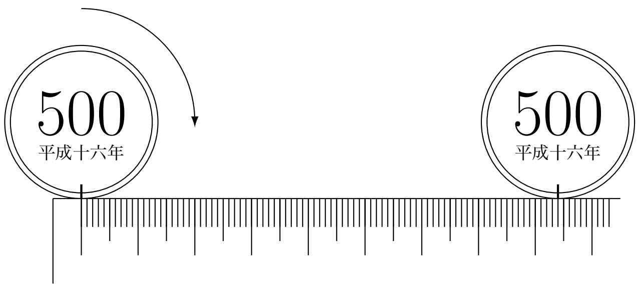
円周率の 1 万桁目はなぜ求められるのか
(知っておきたい三角関数、微分、積分の基礎知識)

1 半円周と半径の比

500 円玉でも缶飲料でもかまわないので、定規に沿って転がしてみよう。はじめに決めた目印が再び定規に接したときの目盛、それがいま転がしたものの周の長さ—すなわち円周—である。ついでに、転がしたものの直径も測っておこう。いずれも、大きなものほど大きな値になるが、円周と直径の比はそれほど変わらないはずだ。



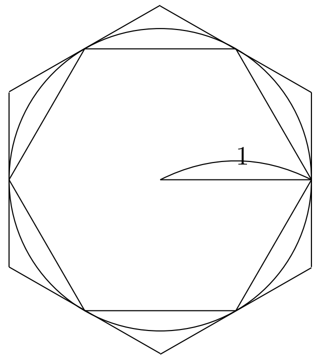
実際に 500 円玉で試したら、その円周は約 8.4cm で直径は約 2.7cm だった。比 $a:b$ はおよそ 3.11 だ。

ここで数学における**定義**について述べておこう。定義とは、数学の議論を円滑に進めるために、はじめに決める約束事だ。いま、私は比についてさりげない定義をしたことに注意してほしい。それは、比 $a:b$ は $a \div b$ で計算するという定義である。$a:b$ を $b \div a$ で計算しても、それがはじめからの約束であるなら何ら支障はないが、ここでは多くの習慣に従ったまでだ。

さて、いくつか円形のものについて円周率を計算すると、だいたい 3 程度の値が得られる。測定には誤差がつきものだから、正確な値が求められないのは仕方ないとしても、だったらどうして円周率がほぼ 3.14 であることが分かるのだろう。それどころか、いまや円周率の値は小数点以下何億桁でも計算できる。ここから先は、円周率を正確に計算する術を手にするまでの旅である。しかし、円周率を求める術を手にするためには、超えなければならない難所—そこは同時に名所でもある—がたくさんある。無事に難所越えが成った頃には、相応の知識が身に付いていることを期待したい。ただし、難所であっても猛スピードで通過してしまうはずだから、せっかくの名所が記憶に残らないかもしれないけれど。

それでは、さっそく旅の準備をしておこう。まず、円周は曲がっているという事実がある。私たちは、まっすぐな線なら容易に測定できるが、曲がったものは簡単に測定できない。しかし、直接測定できなくても、線の長さを比較することは可能だ。たとえば、2 点は曲線で結ぶより一直線に結んだ方が短い。普通は直感で分

かるのであまり追求しないものだが、厳密に証明するとなると難しい場合が多い。



図は、半径 1 の円の内側と外側に接する正 6 角形を描いてある。直感に従えば、円周の長さは、内側の正 6 角形の周より長く外側の正 6 角形の周より短い。このことから、円周がどの程度の長さの範囲に収まるかが計算できる。すると、問題は正 6 角形の周の長さをどうやって求めるか、である。旅が本格化する前に、知識の蓄積に時間を割くことにしよう。

まず、和と積においては、**交換法則**が成り立つことは知っているだろう。交換法則とは $a+b=b+a$、$ab=ba$ を意味する。また、和と積の組み合わせに**分配法則**が成り立つ。分配法則とは $a(b+c)=ab+ac$、$(a+b)c=ac+bc$ を意味する。このことから $(a+b)^2$ は次の手順で計算できる。

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= (a+b)a+(a+b)b\\ &= aa+ba+ab+bb\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\ .\end{aligned}$$

この手順はいささか冗長すぎるものの、すでに定義されたことがらだけを用いて計算している点が重要なのだ。数学を厳密に学ぶ場合は、こんなことでさえ手抜きをしないという見本である。ただ、私たちに大事なことは $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ということである。一度結果を出してしまえば、次回からは途中を省いてもかまわない。手間を惜しまないなら、毎回同じ手順を踏んでもよい。どちらをとるかはコストの問題である。ほとんどの人にとって、$(a+b)^2$ は同じ手順を踏むより、はじめから $a^2+2ab+b^2$ を利用した方が有利であろう。大勢がそう思えば、それが公式となる。公式は暗記すべきものではない。覚えておいた方が便利だと思えば、覚えておけばよいだけのことだ。

この旅は余分な見学地を極力避けるつもりだから、今後は冗長な説明を目にすることはない。本当は隠れた名所こそ見てほしいけれど、そういう場所は別の機会に譲っておきたい。今回の旅で必要になる公式をあげておく。

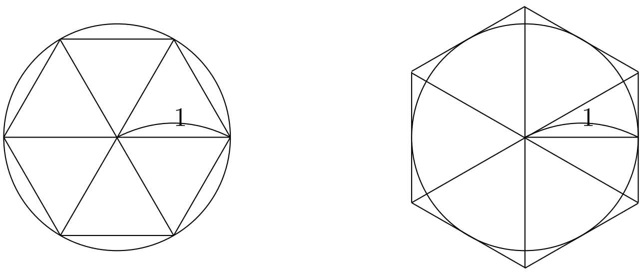
□ 展開の公式

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

等式はふつう左から右へ見るけれど、展開の公式は右から左へ使うことがある。もちろん、旅の途中で使うので覚えておいてほしい。

具体的な円周率の計算の前に断りを入れておきたい。円周率とは直径に対する円周の比を指すが、先ほど半径 1 の円と表現したように、今後の話は直径より半径を重視して進む。そこで円周率とは、半径 R に対する半円周 L の比、すなわち (円周率) $= \dfrac{L}{R}$ と定義し直そう。**この旅ではすべてを半径 $R=1$ の円で考えるので、円周率とは半円周 L のことである。**

では、内側の正 6 角形から調べよう。円の中心から正 6 角形の頂点へ向けて線を引けば、6 つの正三角形に分割できる。円の半径は 1 なので、正 6 角形の一辺も 1、すなわち内側の正 6 角形の半周分の長さは 3 である。半円周 L は内側の正 6 角形の半周分より長いので、この時点で $L > 3$ であることが分かる。まず、(円周率) > 3 であることが判明した。



次は、外側の正 6 角形の半周分の長さだ。同様に円の中心から頂点へ向けて線を引けば、6 つの正三角形に分割できる。しかし、今度は正三角形の一辺が 1 ではなく、高さが 1 である。つまり、高さが 1 の正三角形の一辺の長さを知りたいのだ。それを知るためには、2 次方程式の解法と三平方の定理について理解している必要がある。