10 $1+1=2$ の証明？

「$1+1=2$ を証明する」という表現を見かけることがあるけれど、証明ということばを使うには、この言い方は変だ。それはまるで「角度の一周 $=360°$ を証明する」みたいな響きを持っている。何かが正しいかどうか証明するためには、一般に「何々 **ならば** 何々である」ことが真であると示さなくてはならない。たとえば「3 つの角の大きさが等しい三角形 ならば 正三角形である」の証明は、3 つの角の大きさが等しい三角形を**仮定**して、そこからあれこれ理屈を述べて、その帰結として正三角形になることを示すものだ。なのに $1+1=2$ では仮定がないよね。

それなら、どう言えばよいのだろう。

$1+1$ を計算する ならば 2 である

と言えば、その真偽を述べるに十分な表現である。真偽を判定できる文は**命題**と呼ばれる。ということは、この命題が真であることを示せば、$1+1=2$ を証明したことになるだろう。でも、残念でした。この命題は偽である。なぜなら**反例**を述べることができるからである。旅の途中で見たように、自然数を $\emptyset=0$, $\{\emptyset\}=1$, $\{\{\emptyset\},\emptyset\}=2,\ldots$ と定義し、$+$ を $\cup$ で定義すると $1+1=1$ であり 2 にならない、という十分な反例がある。別の反例は、$\texttt{True}=1$, $\texttt{False}=0$ と定義し、$+$ を $\texttt{or}$ で定義すると、やはり $1+1=1$ である。だらから命題「$1+1$ を計算する ならば 2 である」は、$1+1=2$ であることを正確に言い表した命題ではないのである。

もう少し正確な命題に変えてみよう。

自然数において 0 の後者が 1 ならば $1+1=2$ である

ならどうだろう。こう言えば、0 の存在と 0 の後者 $suc(0)$ が仮定されることになる。すると、この仮定から始めて $0+1=suc(0)$ から $1+1=2$ になることは、旅の途中で出会っているね。その道のりをきちんと書き下せばそれが証明となる。

ただ、この命題は $1+1=2$ という特定の**結論**を証明したに過ぎないことに注意しよう。決して、「自然数において 0 の後者が 1 ならば 自然数の足し算ができる」ことを証明したのではない。0 の後者しか仮定しない場合、$0+0$ ができないことも旅の途中で見たはずだ。自然数の足し算ができることを言いたいのなら、

自然数において 0 の後者が 1 で $suc(n+m)=n+suc(m)$ ならば 自然数の足し算ができる

ことを示さなくてならない。そして、この命題が真であることも見てきただろう。

このように証明というものは、仮定が正しいかどうかを示すものだから、きちんとした仮定から述べる必要がある。$1+1=2$ だけではなく、何が仮定されているかをはっきりさせなくてはならなかったのだ。

だからその都度、細かいことをいちいち言ったのである。でも、細かいことを言わずに暗黙の了解を求めたこともあったね。たとえば、今回の旅では足し算の交換律は暗黙の了解だった。でも、足し算を a^+ と $suc(n+m) = n + suc(m)$ から規定することで、交換律すら証明の対象となり、しかもきちんと証明できるものなのだ。そういうことを逐一やるのは、有名な建造物を見学するときに、柱の位置や間隔、窓の形や床からの高さ、果ては地面の地質や砂粒の大きさ等々、あらゆるものを見て確認するようなものである。一般の見学者にとっては、はっきり言ってうざったい。そもそも地面があるから建造物が建つんだろう。**自明**なことじゃないか。

$1+1=2$ の旅では、ペアノの公理と足し算を a^+ と $suc(n+m) = n + suc(m)$ から規定することは自明のことであった。ここから交換律や結合律を証明できるものの、今回はそれらも自明のものとして旅してきた。そこまでが今回の公理系である。公理は証明する必要がない。もしくは証明できない。ペアノの公理にある "$0 \in N$" は、まさにそれだ。0 が自然数 N に属するなんてこと、どうやって証明すればいいの？　当然、自明のことじゃないか。

ただし、ある公理系で自明と思っても、別の公理系を採用すれば証明できる場合もあるので、こういう問題は一筋縄ではいかない。こうなると哲学である。本気で哲学の旅をするためには、湧き出る泉のような思考力を装備しなくちゃならない。そんなわけで、今回は軽装の旅になったのである。もっとも、私は重装備を用意できないけれどね。

軽装で出かけた旅なので、危なっかしい吊り橋を渡ったりした旅路は、冷や汗の連続だったろう。場合によっては、名所といいながら胡散（うさん）臭い場所を案内したかもしれない。だから、そこが本当の名所かどうかは君たち自身で確認してほしい。建造物の地質や砂粒にも言及しているガイドブックは巷（ちまた）にたくさんある。今回の格安旅行で不満足だったなら、ぜひそれらのガイドブックで学んでもらいたいものである。

では最後に、$1+1=2$ であることのリクツを述べて今回の旅を締めくくろう。

- **自然数の定義**
  1. 自然数の集合を N とする
  2. $\emptyset \in N$ と定義する
  3. $a \in N$ 対して a の後者を $suc(a) = \{a\} \cup a$ と定義する
  4. $a \neq b \ \Rightarrow \ suc(a) \neq suc(b)$ と定義する
  5. これより $N = \{ \quad \emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\{\emptyset\},\emptyset\}, \quad \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\{\emptyset\},\emptyset\}, \quad \ldots \quad \}$
  6. 自然数の要素に数詞を与えて $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ と定義する
- **足し算の定義**
  1. 自然数の定義より $suc(0) = 1$
  2. $n \in N$ に対し $n + 1 = suc(n)$ と定義する
  3. $suc(n + m) = n + suc(m)$ と定義する
- **足し算の公理**
  1. 交換律 $a + b = b + a$ が成り立つ
  2. 結合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$ が成り立つ

以上の定義・公理から

$$
\begin{aligned}
suc(1+1) &= 1 + suc(1) && [\ \text{定義}\ suc(n+m) = n + suc(m)\ \text{より}\ ] \\
&= suc(1) + 1 && [\ \text{交換律}\ ] \\
&= 2 + 1 && [\ \text{定義より}\ suc(1) = \{1\} \cup 1 = \{\{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\},\emptyset\}\} = 2\ ] \\
&= suc(2)\ . && [\ \text{定義}\ n + 1 = suc(n)\ \text{より}\ ]
\end{aligned}
$$

これより $suc(1+1) = suc(2)$。

ここで $1 + 1 \neq 2$ と仮定すると、定義より $suc(1+1) \neq suc(2)$ となって矛盾。

ゆえに $1 + 1 = 2$ である。