9 足し算の真相

$0+0$ を考慮するために、少しだけ前の地へ戻ってみよう。自分自身に $\emptyset$ を加えた集合によって、次の数を定義したあたりの地へと。そこでは $a^+ = \{a\} \cup \emptyset$ としていたんだ。そのことより

$$\begin{array}{ll} 0 & \emptyset \\ 1 = 0^+ & \{\emptyset\} \\ 2 = 1^+ & \{\{\emptyset\},\emptyset\} \\ 3 = 2^+ & \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\} \\ 4 = 3^+ & \{\{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\} \\ 5 = 4^+ & \{\{\{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\} \\ \vdots & \end{array}$$

という自然数を構成できた。

ここで $n+m = n \cup m$ と考えてみる。そのとき $2+3$ は

$$2+3 = \{\ \{\{\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\ \} \cup \{\ \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\ \} = \{\ \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\},\{\{\emptyset\},\emptyset\},\emptyset\ \}$$

となるが、ここで求められた集合は構成した自然数の中にはないのである。自然数どうしを足していながら、答が自然数にならないのは理不尽というものだ。

その原因は自然数にあるのではない。なぜなら、ここで構成した自然数は公理を満たすから問題はないのだ。問題なのは $n+m = n \cup m$ としたことである。足す行為は和集合とは違うということだ。ちなみに、$a^+ = \{a\} \cup a$ とすれば $n \cup m$ は構成した自然数の中にあるが、$2+3$ が 3 になるので具合が悪いことは変わらない。

さて、困った。足す行為に集合を持ち込めないならどうしよう。残るは "後者" の考えしかない。ならば、$n+m$ は何の後者？　または $n+m$ の後者は何？

$n+m$ の後者は $suc(n+m)$ である。それが後者の定義だからだ。でも $+$ を規定したことにはならないね。他に $n+m$ に対して後者を考えられるとしたら、$n+suc(m)$ ぐらいのものであろう。ただ、これも $+$ を規定したことにはなっていない。

結局のところ、集合の概念と後者の考えだけで $+$ を定義するのは、悪いけれどこれが限界である。いずれも後者の扱いを述べているので、$suc(n+m) = n+suc(m)$ を定義するのが精一杯のところなのだ。こんなことでいいのか、と思わないでほしい。実は、こんなことは数学では日常茶飯事なのだから。

たとえば**偶関数**の定義は $f(-x) = f(x)$ である。ここには f がどんな式であるとか、他に何を定義するとかの規定は一切ない。ただ、$f(-x) = f(x)$ でさえあれば偶関数なのである。f は条件を満たす範囲で自由に決めてよいのである。

□ 自然数の定義と足し算の完璧な定義

- ペアノの公理によって構成したものを自然数とする
- $suc(n)$ は n の後者である（このことから $suc(0) = 1$）
- $n + 1 = suc(n)$
- $suc(n + m) = n + suc(m)$

自然数は 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . . という数詞で表しておこう。たとえば 2 は 1 の後者だから $suc(1)$ で、さらに定義より $suc(1) = 1 + 1$ である。逆に、$suc(1)$ は 1 の後者だから 2 である。いまできることは、この手の定義だけである。

その上で 2+3 を考えてみよう。2+3 は定義されていないが、$suc(2+3)$ なら定義済みだ。そこで $suc(2+3)$ は

$$\begin{aligned}
suc(2+3) &= 2 + suc(3) && [\ suc(n+m) = n + suc(m)\ ] \\
&= suc(1) + suc(3) && [\ 2\ \text{は}\ 1\ \text{の後者, すなわち}\ 2 \to suc(1)\ ] \\
&= 1 + 1 + suc(3) && [\ suc(1) \to 1 + 1\ ] \\
&= suc(3) + 1 + 1 && [\ \text{交換律}\ ] \\
&= 4 + 1 + 1 && [\ 3\ \text{の後者は}\ 4,\ \text{すなわち}\ suc(3) \to 4\ ] \\
&= suc(4) + 1 && [\ 4 + 1 \to suc(4)\ ] \\
&= 5 + 1 && [\ 4\ \text{の後者は}\ 5,\ \text{すなわち}\ suc(4) \to 5\ ] \\
&= suc(5) && [\ 5 + 1 \to suc(5)\ ]
\end{aligned}$$

と計算できる。このことから $suc(2 + 3) = suc(5)$ であると分かるので、$2 + 3 = 5$ と言えるのである。

では、$0 + 0$ が計算できるだろうか。

$$\begin{aligned}
suc(0+0) &= 0 + suc(0) && [\ suc(n+m) = n + suc(m)\ ] \\
&= 0 + 1 && [\ suc(0) \to 1\ ] \\
&= suc(0)\ . && [\ n + 1 = suc(n)\ ]
\end{aligned}$$

これより $suc(0 + 0) = suc(0)$ と分かるので、$0 + 0 = 0$ と言える。やった、不備はないぞ。

さあ、ここは名所の中でもとくに絶景の名所である。足し算の定義は、$suc(n + m) = n + suc(m)$ を定めただけである。決して、足すことの定義を「合わせて数えること」だとか「余分を数え合わせること」だとかを規定したわけではないことに注意しよう。小学校から親しんできた足すの概念—具体物を合わせて数えること—は足すことではないのである。+ が具体的に何をするものか分からなくてもよいのだ。分かっているのは、+ という行為があって、それが $suc(n + m) = n + suc(m)$ によって定義されることさえ分かればよいのである。それだけで $2 + 3 = 5$ 成り立ち、私たちが日頃行っている "合わせる" ことに合致するのだから。

繰り返しになるけれど、合わせることが $+$ の演算なのではなく、$+$ の演算が合わせることに使えるに過ぎないのである。

ところで、途中で交換律によって項の順番を入れ替えたところがある。3 行めから 4 行めにかけてだ。もし、$a+b$ を $b+a$ に入れ替えることができなければ、$suc(2+3)$ は計算できない。その意味で交換律は、足し算における暗黙の定義であると思ってもらってよい。そして、もうひとつ暗黙の定義を使った場所がある。5 行めから 6 行めに移るところで、$4+1+1$ を $suc(4)+1$ に直したことがそれである。もともと $suc(1)=1+1$ であったので、$4+1+1=4+(1+1)$ と見るのが正しい。しかし、5 行めから 6 行めにかけて $4+1+1=(4+1)+1=suc(4)+1$ と見ている。つまり、暗黙のうちに $a+(b+c)=(a+b)+c$ としていたのだ。これは**結合律**という。