7 ペアノの公理

この旅は一向に目的地に着く気配を感じさせないね。五里霧中の旅を続けても仕方ないので、近道をして名所に先回りしてしまおう。名所を案内してくれるのはペアノである[*1]。

数を $\emptyset$ と集合の概念だけで構成すると、和の計算が和集合と同じことになってしまう。これが数の定義であり、かつ和の計算の定義であると言い張ってもよいけれど、それでは自然数と言いがたい。私たちは、自然数を定義した上で $1+1=2$ であることを示したいのである。そこでペアノは、次のように定まるものを自然数の集合 N と決めた。

1. $0 \in N$（自然数の集合には数 0 が属する）

2. 任意の $a \in N$ に対して "a の後者" が存在する（a の次である a^+ が作れ、それを a の後者と呼ぶ）

3. 0 はいかなる $a \in N$ の後者でもない（0 の前に数はない）

4. $a \neq b$ ならば a の後者 $\neq b$ の後者（a と b が別ものなら a の後者と b の後者も別ものである）

5.「$0, a \in M \;\Rightarrow\; a$ の後者 $\in M$」であれば、M は自然数の集合である

旅の途中で、数の基本単位として空集合 $\emptyset$ を考えたことを思い出してほしい。自然数の集合に数 0 が属するのであれば、真っ先に考えた $\emptyset$ が 0 になるであろう。続いて考えたのは、集合の概念だけで数を構成することであった。そのときは、いま存在する集合 A と $\emptyset$ の和集合を考えて、次の数を作った。任意の集合 A と $\emptyset$ の和集合を作ることは必ずできるので、A に対して必ず A^+ が存在し、これが後者 $\{A, \emptyset\}$ となる。その結果、$\emptyset$ の後者は $\{\emptyset\}$、$\{\emptyset\}$ の後者は $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$、$\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ の後者は $\{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \emptyset\}$、$\ldots$ となって、数を構成できたのだった。

もし、真っ先に $\{\emptyset\}$ から考え始めたらどうだろう。結論を言えば、これではペアノの言う自然数にならない。最初の $\{\emptyset\}$ が 0 である。そうすれば、後者が $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$、$\{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \emptyset\}$ と続くので、ほぼ同じように見える。しかし、これは自然数ではない。というのは、$\emptyset$ を考えたとき $\emptyset^+ = \{\emptyset\}$ を作ることができてしまい、0 である $\{\emptyset\}$ の前に $\emptyset$ があることになってしまうのだ。なかなか微妙だよね。

さて、ここでは前と違う考えで自然数を構成してみよう。$\emptyset$ を 0 とするところから始めるのは同じである。ただし、今度は "次" の考え方を改めることにする。次を、いま存在する集合と $\emptyset$ の和集合とするのではなく、自分自身の集合と自分自身の和集合—それは $\{(\text{自分自身})\} \cup (\text{自分自身}) = \{\{(\text{自分自身})\}, (\text{自分自身})\}$ である—としよう。

[*1] Giuseppe Peano(1858–1932)：イタリアの数学者。

具体的には、$\emptyset$ の後者は $\{\emptyset\} \cup \emptyset = \{\emptyset\} \cup \{\ \} = \{\emptyset\}$、さらに $\{\emptyset\}$ の後者は $\{\{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ である。いままでと同じことじゃないかって？　そうではないのだよ。だって、$\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ の後者は $\{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset\}, \emptyset\} = \{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$ になるのだから。こうしておけば、任意の a の後者が必ず存在し、0 を $\emptyset$ から始めているから、0 の前に数がないことも分かる。

これもペアノの言う 3 つまでの条件を満たすので、自然数の候補である。候補といったのは、4, 5 番めの条件を満たすかどうか確認していないからだ。

□ 後者の定義例

- a^+ を $\{a\} \cup a$ と定義して後者とすることもできる

集合の概念から数を構成した場合、a と b が別ものなら a の後者と b の後者も別ものであると言えるだろうか。それは明らかなように思える。なぜなら a の次は $\{\{a\}, a\}$ で、b の次は $\{\{b\}, b\}$ なので、$a \neq b$ である以上、これらが等しくなることはなさそうだ。でも、例外の可能性がある。$\{a\} = b$, $\{b\} = a$ になってしまう事態を想像すると、

$$\{\{a\}, a\} = \{b, a\}, \quad \{\{b\}, b\} = \{a, b\}$$

となって、$\{\{a\}, a\} = \{\{b\}, b\}$ が言えないだろうか。もちろんそんなことはない。$\{a\} = b$, $\{b\} = a$ ということは、$\{\{a\}\} = a$, $\{\{b\}\} = b$ が成り立つことでもある。a や b が何であれ、集合の考えから $\{\{a\}\}$ と a は別ものである。よって $a \neq b$ ならば、a の後者 $\neq b$ の後者 である。

最後の条件が少し変な感じだね。この定義は、0 と a を含む集合 M があって、M の中で a^+ を考えることができれば、それは自然数の集合だと言っている。要するに、そういう性質をもつ集合が自然数だから、自然数とは私たちが意識しているような唯一無二のものではないということである。実際、ここで 2 種類の後者の作り方から、申し分のない自然数が構成できたわけだし。別の言い方をすれば、自然数はみな同じ性質をもつと言ってもよいだろう。

とにかく、苦労の末に自然数を定義できたぞ。自然数が定義できたのはよいけれど、さすがにこの記法は骨が折れる。要は、同じものは同じ記号で、違うものは違う記号で表せればよいので、これらに順に 0, 1, 2, 3, . . . と数詞を与えよう。

□ 自然数の定義

- $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$, $\{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$, $\{\{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$, . . . も自然数として定義できる
- 上記の自然数に 0, 1, 2, 3, 4, . . . の数詞を与える

自然数に 0 が含まれることに違和感を覚えるだろうか。自然数には 0 を含めないとする考えも確かにある。

数を区別する立場だけ考えるなら、0 を自然数に入れても入れなくても、そんなことはどうでもよいことなのだ。けれど、数の定義から数の足し算へ発展させるなら、自然数を“0 の性質”をもつ数から始めるのがよい。その性質をもつのが $\emptyset$ なのである。だから、$\emptyset$ から始まる自然数に 1 から始まる数詞を与えても問題ない。その場合、1 は $\emptyset$ の性質をもつからだ。ただ、すでに私たちの習慣では、足し算において 0 が特別の役割を果たしているので、0 が自然数に入るのは自然なことなのである。

では、0 の性質とは何だろう。足し算においてそれは、$0 + n = n$ という性質である。このために足し算が定義できると言ってよい。そのことがはっきりするのは、次の地へ移動してからだ。