3 ラッセルのパラドクス

集合の概念が何となく見えてきたところで、集合の概念を根底から覆す事例を取り上げよう。ラッセルのパラドクスである[*1]。

集合はものの集まりである。ただ、具体物が集まっている必要はない。つまり、思考できるものなら何でも OK なのである。そこで、次のような集合を考える。

「自分自身を要素とする集合」と「自分自身を要素としない集合」

言葉の意味は別にして、これでありとあらゆる集合が 2 分できたことに注意してほしい。一方は「〜する集合」で他方は「〜しない集合」だから、一方に該当するものは他方には該当しない。つまり、何かについて「〜する」か「〜しない」か問えば、必ずどちらか一方だけが該当する。すなわち、あらゆるものはどちらかの集合だけに属するのだ。

こう言うと、世の中には白黒つけられないものはたくさんあるという反論が返ってきそうだ。しかし、数学の対象物にそのような曖昧なものはない。必ず白黒をつけるのが大前提なのである。ということで、私たちが思考するあらゆる集合は、先に挙げたどちらか一方の集合に属すると考えてよい。

では、自分自身を要素とする集合とは、どういう集合なのだろうか。たとえば「アルファベット（英大文字）の集合」を考えよう。これは具体的に

$$\{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ K,\ L,\ M,\ N,\ O,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ W,\ X,\ Y,\ Z\}$$

と書き出すことができる。ところで「アルファベット（英大文字）の集合」の自分自身とは“アルファベット（英大文字）の集合”である。これは明らかに上に書き出した集合の要素ではない。つまり、「アルファベット（英大文字）の集合」は自分自身を要素としない集合なのである。

そういう理屈ならば、「何々の集合」を考えて、それを具体的に { あれ, それ, なに, ...} と書き出すと、普通は自分自身にあたる“何々の集合”なる要素は { あれ, それ, なに, ...} に属さないように思える。自分自身を要素とする集合なんてあるのだろうか。

それがあるのだ。しかも、いまその例を示せる。それは

このセクションに含まれる文字列の集合

である。それを具体的に書き出せば

{ ラッセル, 集合」, A, 字）の集, いまその例を, ...}

[*1] Bertrand Russel(1872–1970)：イギリスの哲学者・数学者。

と、無数の要素—実際には有限個数であるが—を目にすることができる。ほらね、自分自身である“このセクションに含まれる文字列の集合”が

$$\{\text{ラッセル},\ \text{集合」},\ A,\ \text{字）の集},\ \text{いまその例を},\ \ldots,\ \text{このセクションに含まれる文字列の集合},\ \ldots\}$$

の中に見つかったでしょう。

いささかこじつけ気味かもしれないね。でも、このような集合は見つけるのに苦労するけど、たくさんあるのだ。たとえば「黒い文字の集合」は、“黒い文字の集合”が黒で印刷されていれば自分自身を要素とする集合だ。「歌の集合」は“♯うたの♮しゅうごう”と歌えば自分自身を要素とする集合だ。そういった他の例は君たち自身で見つけてもらいたい。さあ、自分自身を要素とする集合とそうでない集合を理解したところで、ラッセルのパラドクスにいこう。

まず、自分自身を要素としない集合を考える。普通に思考した集合はたいていこの仲間だから、A, B, C, $\ldots$といろいろ思い浮かぶことだろう。これらは自分自身を要素としていないので、$A \notin A$, $B \notin B$, $C \notin C$, $\ldots$ということだ。その上で、これらすべての集合からなる集合 X を作る。すると $X = \{A, B, C, \ldots\}$ には、自分自身を要素としない、あらゆるすべての集合が入っていることになる。

X は X に属しているのだろうか？　もし $X \notin X$ と仮定すると、X は自分自身を要素としない集合である。自分自身を要素としない集合を集めたものが X だったことを思い出そう。このことから、X は $X = \{A, B, C, \ldots, X, \ldots\}$ に属しているはずだ。すなわち $X \in X$ である。むむ、$X \notin X$ と仮定したのではなかったかな。矛盾しているね。

それなら $X \in X$ と仮定してみよう。すると X は自分自身を要素とする集合であるから、X は $X = \{A, B, C, \ldots, (\text{この中に } X \text{ はない}), \ldots\}$ に属していない、すなわち $X \notin X$ であるはずである。むむ、今度は $X \in X$ と仮定したはずだ。これも矛盾している。つまり、いずれの仮定でも矛盾を生じてしまうのだ。

□ ラッセルのパラドクス

- $X = \{\text{集合 } A \mid A \notin A\}$ と定義すると...

  $X \notin X \Rightarrow X \in X$

  $X \in X \Rightarrow X \notin X$

何がいけなかったのだろうか。そもそも、自分自身を要素とする集合という概念がおかしいのだとか、集合自体の定義が明確でないとか、様々な意見はあるだろう。実際、過去の数学の議論においても似たような経過をたどった。そして、矛盾が生じないような**公理系**が考えられてもいる。しかし、矛盾を完璧に排除するのは非常に困難であるらしい。こうなると、数学を超えて哲学に近いものになってくるのか、基本的にはラッセルのパラドクスは容認せざるを得ないようである。

矛盾が生じる事例は、ラッセルのパラドクス以外にもあることが知られている。いずれの事例にせよ、集合という概念は微妙に危ういバランスの上に成り立っていることは間違いない。この先、集合を基準にして $1+1=2$ の地へ向かうのだが、とても危なっかしい吊り橋を渡ることは覚悟してもらいたい。