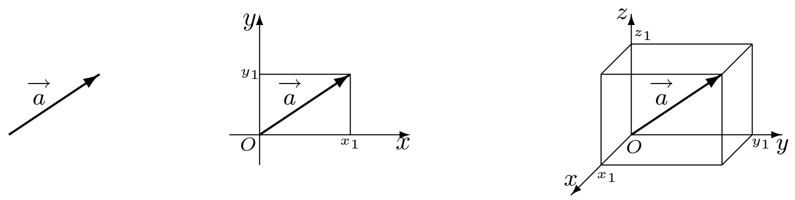
空間におけるベクトル

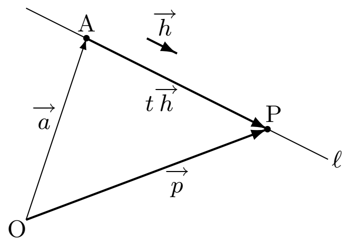
いままで平面上のベクトルについて考えてきたが、空間におけるベクトルも同じように考えることができる。紙面に $\overrightarrow{a}$ を描いた場合、実際は平面のベクトルか空間のベクトルかの区別は難しい。



$\overrightarrow{a}$ が平面のベクトルならその成分は $(x_1,\ y_1)$ のように、空間のベクトルならその成分は $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ のようになるだろう。座標を与える方が具体的で分かりやすい気がするが、実際はベクトルで扱う方がよい。なぜなら、座標がないために点の位置そのものを考えればよいからである。

空間における直線の方程式

空間における直線の方程式を考えてみよう。ここでは点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{h}$ に平行な直線の方程式を求めることにする。



直線 ℓ 上の任意の点 P は $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ であるから、t を実数として

$$\boxed{\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{h} \qquad (※)}$$

であるから、これは平面の方程式とまったく同じである。ベクトルで考えるようになると、平面や空間の違いは無視できるのである。

それならば、方程式を成分を用いて表せばどうなるだろうか。$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$、$\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$、$\overrightarrow{h} = (l,\ m,\ n)$ とすると※は

$$(x,\ y,\ z) = (x_1,\ y_1,\ z_1) + t(l,\ m,\ n) = (x_1 + tl,\ y_1 + tm,\ z_1 + tn)$$

である。これを x, y, z に関する連立方程式と見れば

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_1 + tl \\ y & = & y_1 + tm \quad (☆) \\ z & = & z_1 + tn \end{array}\right.$$

であるが、このままで方程式の解になっている。この解が得られるための方程式は、t を消去する—t について解く—ことで復元される。それは

$$\boxed{\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \ (= t)}$$

である。これが、空間における直線の方程式である。平面の方程式とはまったく似ていないと思うかもしれない。しかし、平面における直線の方程式—点 $(x_1,\ y_1)$ を通り傾き m の直線の公式、$y - y_1 = m(x - x_1)$ も

$$\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{m}$$

と書き直してみると、z を省いた空間の方程式と瓜二つであることが分かる。さらに傾き m を、直線に平行なベクトルの成分 $(1,\ m)$ であると見れば、直線の方程式は平面でも空間でも同じ形をしているといえるのである。

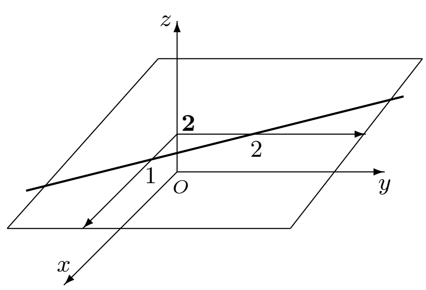
* * *

空間における直線の方程式には分母に方向ベクトルの成分があるので、たとえば方向ベクトルが $(l,\ m,\ 0)$ のように 0 を含んでいると、直線の方程式の分母が 0 になってしまう。このようなときは、もちろん $\frac{z-z_1}{0}$ などと書けるはずがないので、このような場合は t を消去する前の状態—つまり☆の $z = z_1 + tn$—に戻ればよい。すると、この例では $n = 0$ であるから $z = z_1$ であり、☆の残りの 2 式から t について解いた

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}, \quad z = z_1$$

が直線の方程式となる。

この場合 $(x,\ y)$ の組は $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}$ を満たす任意の値をとり、かつ z が z_1 に固定されている点の集合であることを意味する。たとえば、$(2,\ -2,\ \mathbf{2})$、$(-1,\ 4,\ \mathbf{2})$、$(3,\ -4,\ \mathbf{2})$、$\ldots$ のような点の集合である。この例は $z = 2$ を含む xy 面に平行な平面上にある直線である。



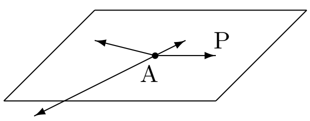
実際、$(2,\ -2,\ \mathbf{2})$、$(-1,\ 4,\ \mathbf{2})$、$(3,\ -4,\ \mathbf{2})$、$\ldots$ のような点の集合として図の直線が描かれているわけだが、図を見なくとも、たとえば 2 点 $(2,\ -2,\ \mathbf{2})$、$(-1,\ 4,\ \mathbf{2})$ の変化の割合が $\Delta x=-3$、$\Delta y=6$、$\Delta z=0$ であることが分かる。これは比にすると $-1:2:0$ もしくは $1:-2:0$ であり、別の 2 点における変化の割合を調べても変わらない。このことは直線の方向ベクトルが $(-1,\ 2,\ 0)$ もしくは $(1,\ -2,\ 0)$ であることなので、直線の方程式は

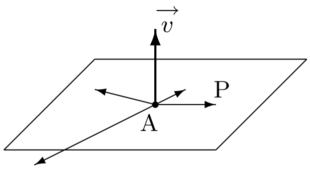
$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{2},\quad z=2$$

である。▮

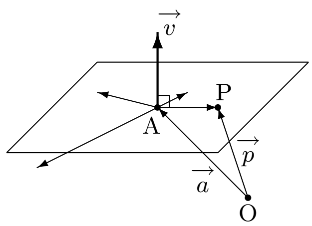
平面の方程式

空間の図形には直線の他に平面がある。平面は空間の中に平らに、そして一様に広がっているので、点 A を基準にして平面上の任意の点 P の位置を考えてもうまくいかない。なぜなら、P を表すためのベクトルがあらゆる方向に向かってしまい、収拾がつかなくなってしまうからである。





ところが平面上の点 A を始点とする、平面に垂直なベクトル $\overrightarrow{v}$ を考えると状況は一変する。このようにしても平面上の任意の点 P を表すためのベクトルはあらゆる方向に向かってしまうが、それらはどれをとっても $\overrightarrow{v}$ に垂直なのである。ベクトルが垂直ならば内積の考えが使えるので、平面の方程式も簡単に立てられるだろう。



すると $\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{AP}$ で、$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$ なので

$$\boxed{\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})=0}$$

が平面のベクトル方程式ということになる。$\overrightarrow{v}=(l,\ m,\ n)$、$\overrightarrow{p}=(x,\ y,\ z)$、$\overrightarrow{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ として、具体的な式を求めてみよう。それは $(l,\ m,\ n)\cdot(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=0$ より

$$\boxed{l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0}$$

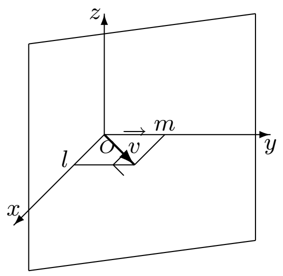
である。

$*\quad *\quad *$

ここで得られた平面の方程式は、展開して定数項にあたる $-lx_1 - my_1 - nz_1$ をまとめて k と書けば

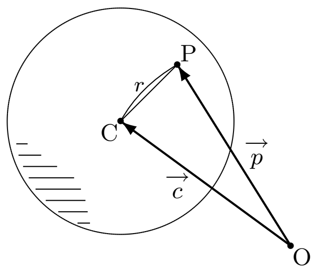
$$lx + my + nz + k = 0 \quad (※)$$

となって、式の形が平面における直線の方程式 $ax + by + c = 0$ に似ていると思うであろう。では※において、$n = 0$ とした $lx + my + k = 0$ は直線を表すのだろうか。



もちろん、そうでないことは前の章で確認している。$lx + my + k = 0$ は $n = 0$ である平面の方程式に変わりないのである。この場合は $\overrightarrow{v} = (l,\ m,\ 0)$ に垂直なベクトルの集合で、それは z 軸に平行な平面を表すのである。▮

球面の方程式



球面は中心 C から一定の距離 r だけ離れた点 P の集合である。これは平面における円とまったく同じ状況にあるので、位置ベクトルとして $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{p}$ とすると円の方程式とまったく変わらない

$$\boxed{(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) = r^2}$$

が、求める球面の方程式である。