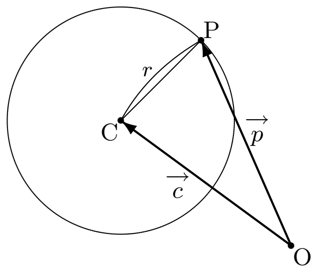
円のベクトル方程式

円についても簡単にベクトル方程式を求めることができる。



円は中心 C から一定の距離 r だけ離れた点 P の集合である。すなわち $CP = r$ がいえる。円の中心 C でないところに O をとり、$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{p}$ とすると、$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}$ なので $|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}| = r$ である。これをそのまま円のベクトル方程式としてもよいのだが、内積を用いると便利なことが多いので、両辺を 2 乗した $|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}|^2 = r^2$ を考える。内積の性質から $|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}|^2 = (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c})$ であったので、結局、中心 C、半径 r の円のベクトル方程式は

$$\boxed{(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) = r^2}$$

であることが分かる。

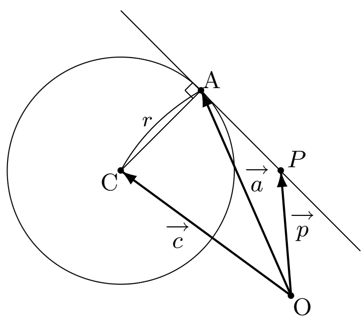
ここで $\mathrm{C}(c_1,\ c_2)$ とし、円周上の任意の点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると、ベクトル方程式は

$$(x - c_1,\ y - c_2)\cdot(x - c_1,\ y - c_2) = r^2 \quad \text{より} \quad (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

を得るので、平面座標で扱う円の方程式と一致している。

円の接線の方程式

円の接線もベクトル方程式で簡単に求められる。



円に接する直線と円の接点を A とする。直線上の任意の点を P とすると、接線は円の半径に常に垂直であるから、$AP \perp AC$ がいえる。$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$ で、これらの内積が 0 になることから

$$\boxed{(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) = 0}$$

が、中心 C の円周上の点 A における接線のベクトル方程式となる。

実際、C$(c_1,\ c_2)$、A$(a_1,\ a_2)$、P$(x,\ y)$ とすると、

$$(x - c_1,\ y - c_2) \cdot (c_1 - a_1,\ c_2 - a_2) = 0$$

より

$$(x - c_1)(c_1 - a_1) + (y - c_2)(c_2 - a_2) = 0$$

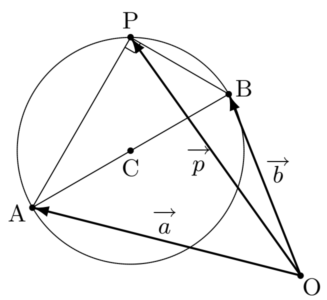
を得る。この式は、平面座標で扱う円の接線の方程式とはほど遠い感じを受けるだろうが、少し技巧的に

$$\begin{aligned}
(x - a_1 + a_1 - c_1)(a_1 - c_1) + (y - a_2 + a_2 - c_2)(a_2 - c_2) &= 0 \\
(a_1 - c_1)(x - a_1) + (a_2 - c_2)(y - a_2) &= -(a_1 - c_1)^2 - (a_2 - c_2)^2 \\
(c_1 - a_1)(x - a_1) + (c_2 - a_2)(y - a_2) &= (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2
\end{aligned}$$

としておけば、$(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2$ が三平方の定理から r^2 に等しくなるので、公式と同じ形になることが分かる。

2 点を直径の両端とする円

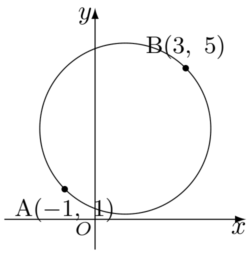
2 点 A、B が与えられたとき、2 点を直径とする円の方程式を考えることができる。



2 点 A、B の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ とする。円周上の任意の点を P とし、その位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ とする。半円に対する円周角は直角であるから、$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ となる。これをベクトルで表せば

$$\boxed{(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) = 0}$$

を得る。これが、2 点 A、B を直径の両端とする円のベクトル方程式である。



具体的に直径の両端を $\overrightarrow{a} = (-1,\ 1)$、$\overrightarrow{b} = (3,\ 5)$ とする円を考えてみよう。ベクトルを用いないとすると、まず円の中心を

$$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{1+5}{2}\right) = (1,\ 3)$$

のように求めてから、半径 r を求めるために三平方の定理を利用して

$$r^2 = (3-1)^2 + (5-3)^2 = 8$$

とするであろう。この結果、求める円の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$$

であることが分かる。展開して整理すれば

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 2 = 0$$

である。

ベクトル方程式ならば、$\overrightarrow{p} = (x,\ y)$ として

$$(x+1,\ y-1) \cdot (x-3,\ y-5) = 0$$

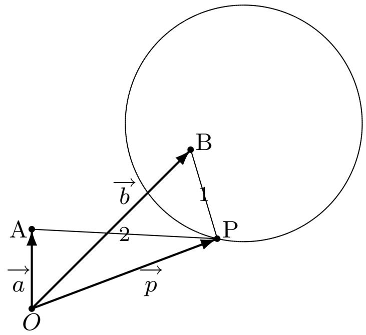
より

$$(x+1)(x-3) + (y-1)(y-5) = 0$$

が、求める円の方程式である。展開して整理すれば、先の結果と同じになることはすぐ分かる。

アポロニウスの円

一定の条件を満たす点の集合—**軌跡**という—を調べるのにもベクトルは有効である。たとえば 2 定点 A、B からの距離の比が 2 : 1 であるような点の集合を考える。



このことをベクトルで表すために、定点 A、B および動点 P をそれぞれ位置ベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{p}$ で表すことにする。すると

$$|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}|:|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}|=2:1 \quad \text{すなわち} \quad |\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}|=2|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}|$$

ということであるから、両辺を 2 乗してベクトルの内積の形である

$$(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})=4(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b})$$

が求める軌跡のベクトル方程式となる。式を見ただけでは軌跡がどんな図形を描くか分からないだろうが、実際この軌跡は円になることはすぐに確かめることができる。

具体的に A(0, 0)、B(6, 3)、P$(x,\ y)$ とおいて確かめよう。内積の形を成分で表すと

$$(x,\ y)\cdot(x,\ y)=4(x-6,\ y-3)\cdot(x-6,\ y-3)$$

であるから、内積の定義から

$$x^2+y^2=4\{(x-6)^2+(y-3)^2\}$$

を得るので、整理すれば円を表す方程式であることが分かる。

一般に、2 定点からの距離の比が $m:n$ になる点の軌跡は円になり、そのような円をアポロニウス[1]の円という。

[1] アポロニウス：おそらく、古代ギリシア語圏の数学者。