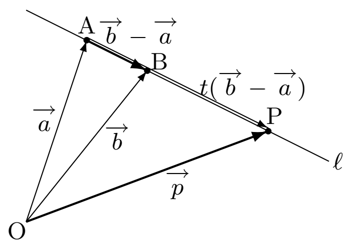
直線のベクトル方程式

ベクトルに数値を与えて座標平面の中で扱えば、具体的な計算ができて大変便利なように思える。たしかに、方向のように抽象的な要素を、具体的な数値にでき計算に使えるのは分かりやすい。しかし、必ずしも座標平面上にベクトルを置いて考えることが最上とは限らないのである。

たとえば直線の方程式を考えよう。一般に、平面上に 2 点を与えればただ 1 つの直線が決まる。このとき、直線を表す x, y の関係式を直線の方程式と呼んでいるが、実際は、x, y で与えられる方程式を満たす $(x,\ y)$ の組を座標平面に示すと、点の集合が直線になるのである。つまり、直線を見て関係式が作られるのではなく、方程式の解が直線状になっていると解釈するのが妥当なのである。

このことをベクトルを用いて考えるとどうなるであろうか。2 点 A、B を通る直線上の任意の点 P をベクトルで表すことができれば、点 P の集合は直線 AB を表す。



さて、2 点 A、B は始めに与えられた点—定点—であるから、O を始点とする位置ベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ で表しておく。このとき、直線 ℓ 上の任意の点 P が $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ を用いて表すことができれば、その式は ℓ を表す方程式となる。ところで、ベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ から $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ を作ることができ、それはいまのところ ℓ 上に乗っているので、$\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ が直線 ℓ の一部を表しているように見えるが実際は違うことに注意したい。$\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ は ℓ の一部ではなく、ℓ に重ねることができるベクトルなのである。

ここで、任意の実数 t を用いて $t(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})$ を考えると、このベクトルは ℓ に平行な任意の大きさのベクトルになるので、

$$\overrightarrow{a}+t(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})$$

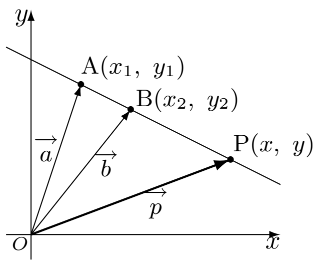
が ℓ 上の任意の点 P を指すことになるだろう。すなわち、この式が直線の方程式なのである。少し整理した形に書き直せば、2 点 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ を通る直線の方程式は

$$\boxed{\overrightarrow{p}=(1-t)\overrightarrow{a}+t\,\overrightarrow{b} \qquad (☆)}$$

であるといえる。このように、ベクトルを用いて図形を表す方程式は**ベクトル方程式**と呼ばれる。

直線の方程式であること

ベクトルによる直線の方程式が $\overrightarrow{p} = (1-t)\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}$ であると分かっても、いまひとつ納得しがたいところがあるかもしれない。そこで、この方程式が間違いなく直線を表す方程式であることを確認してみよう。



確認は簡単なことで、ベクトルを成分で表して方程式に代入するだけである。それぞれのベクトルの成分を $\mathrm{P}(x,\ y)$、$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$、$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とおいて代入すると、$\overrightarrow{p} = (1-t)\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}$ は

$$\begin{aligned} (x,\ y) &= (1-t)(x_1,\ y_1) + t(x_2,\ y_2) \\ &= (x_1 + t(x_2 - x_1),\ y_1 + t(y_2 - y_1)) \end{aligned}$$

となる。これを x 成分、y 成分それぞれの連立方程式

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

とみて、t を消去してみよう。それには第 1 式より $t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ を第 2 式に代入することで、直ちに

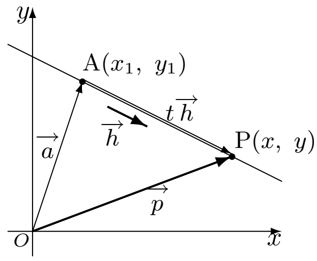
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (\bigstar)$$

を得ることができるのだが、この式はたしかに 2 点 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式を求める公式になっている。

ここで☆と★を比べてみると、ベクトル方程式である☆の方が簡単な式に思えてくる。また、★は平面座標の値に縛られた式であるのに対し、☆にはそのような制約がない。後の話題であるが、空間においても直線は存在するので直線の方程式が書ける。その場合、座標の値を使うと $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ のように 3 つの成分で表すことになるので、直線の方程式が複雑化するのは仕方ないことである。しかし、ベクトル方程式であれば平面であれ空間であれ、常に☆が直線を表すのである。このことからも、ベクトル方程式は活用範囲が広いといえるだろう。

平行ベクトルと直線

いま求めたベクトル方程式は、2 点を通る直線の方程式であった。直線の方程式というと、直線の傾きと y 切片の値を用いて表す方が馴染みがあるかもしれない。直線の傾きは直線の向きを表しているので、ベクトル方程式における直線の傾きは直線に平行なベクトルのことである。また y 切片は、特別視しなければ単に平面上の 1 点に過ぎないことに注意しよう。



要するに、傾きと切片で表される直線の方程式とは、点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り、方向ベクトル $\overrightarrow{h}$ に平行な直線の方程式のことである。このとき $\overrightarrow{p}$ は、$\overrightarrow{a}$ と $t\overrightarrow{h}$ を用いて

$$\boxed{\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{h}}$$

と表されるので、これが求める方程式である。確認のため $\overrightarrow{p} = (x,\ y)$、$\overrightarrow{a} = (x_1,\ y_1)$、$\overrightarrow{h} = (1,\ m)$ としてみよう。$\overrightarrow{h} = (1,\ m)$ というのは、傾きが m であることに注意した上で代入すると

$$\begin{aligned} (x,\ y) &= (x_1,\ y_1) + t(1,\ m) \\ &= (x_1 + t,\ y_1 + mt) \end{aligned}$$

より

$$\begin{cases} x = x_1 + t \\ y = y_1 + mt \end{cases}$$

であるから、第 1 式から $t = x - x_1$ を第 2 式へ代入すると

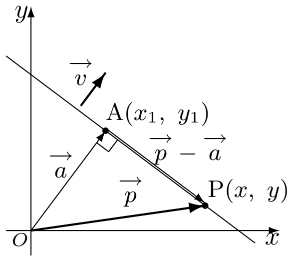
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

を得る。これは点 $(x_1,\ y_1)$ を通る傾き m の直線を求める公式である。

垂直ベクトルと直線

図形をベクトルで考えるようになると、平行なベクトルを用いるより垂直なベクトルを用いる方が便利なことがある。なぜなら、互いに垂直なベクトルの内積は 0 になるので、計算上の扱いが格

段に簡略化できるからである。垂直なベクトルを用いた直線の方程式は、点 A$(x_1,\ y_1)$ を通り、ベクトル $\overrightarrow{v}$ に垂直な直線の方程式を考えることになる。



このときは $\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}$ が互いに垂直であるから、それらの内積は 0 である。よって

$$\boxed{\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})=0}$$

が求める方程式である。この方程式を、内積の性質を用いて展開すると

$$\boxed{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a}}$$

であるから、これもまた、点 A を通るベクトル $\overrightarrow{v}$ に垂直な直線の方程式である。

$*\quad *\quad *$

$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a}$ の両辺を $\overrightarrow{v}$ で割れそうな気がしたとしたら、それは大きな勘違いである。内積 $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{p}$ は積 $v\cdot p$ とは違うのである。数学では、限られた記号を場面に応じて使い回すことが多くあるため、十分な注意を払う必要がある。誤解を招かないために、内積 $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{p}$ を $(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{p})$ と書く流儀もある。この場合は、$(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{p})=(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{a})$ と書けるので、$\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{p}$ がセットであることが強調されている。▮