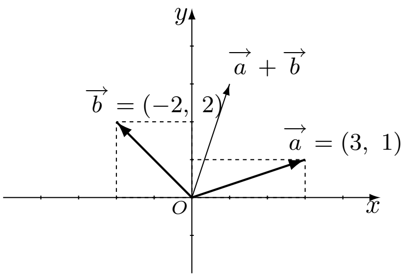
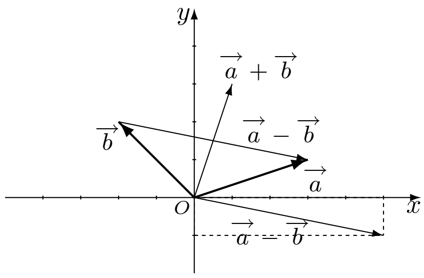
ベクトルと座標平面

ベクトルを位置ベクトルで見るようになると、基準となる始点Oを座標平面の原点 O と同一視すれば、ベクトルが座標平面に描けるものであることが分かる。このことはすなわち、ベクトルに座標の考えを取り入れることができるということである。位置ベクトルの始点は必ず原点 O なのだから、ベクトルを特徴づける要素は終点の位置である。そこでベクトルの終点の座標を、そのベクトルと同一視することにしよう。





たとえば $\overrightarrow{a}$ の終点の座標が $(3,\ 1)$ であれば、$(3,\ 1)$ という表記が $\overrightarrow{a}$ そのものを表すということである。いま、$\overrightarrow{a}=(3,\ 1)$、$\overrightarrow{b}=(-2,\ 2)$ であるとする。このとき $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ を考えてみる。ベクトルの和や差は、ベクトルを平行移動して継ぎ足すことであったので、単純に

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b} &= (3,\ 1)+(-2,\ 2) = (1,\ 3)\\ \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b} &= (3,\ 1)-(-2,\ 2) = (5,\ -1)\end{aligned}$$

でよいことが分かる。なぜならベクトルを平行移動することは、ベクトルを斜辺とする直角三角形の横と縦の長さ、すなわち x 座標と y 座標も平行移動して継ぎ足しているからである。このことはベクトルの実数倍にも当てはまるので、一般に $\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2)$ とすると

$$\boxed{\begin{aligned}(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2) &= (a_1+b_1,\ a_2+b_2)\\ (a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2) &= (a_1-b_1,\ a_2-b_2)\\ k(a_1,\ a_2) &= (ka_1,\ ka_2)\end{aligned}}$$

が成り立つ。このようなときは、ベクトルの座標による計算と言わず、**成分**による計算ということが多い。

* * *

ベクトルは始め、大きさと向きを持ったものと考えてきたが、このように数の組で表してもよいことになると、ベクトルが向きを持つという意味は徐々に薄れていくだろう。それでも数の組が $(a_1,\ a_2)$ や $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ であれば、私たちは平面や空間の中にその向きを感じることができる。しかし $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ ともなると、もはや向きを認識することなどできないであろう。強いて言うなら 4 次元の世界における方向とでもなるだ

ろうか。このようなことから、4 つ以上の成分を持つベクトルは、方向ではなく**次元**で考えることが自然になってゆくのである。▌

ベクトルの大きさ

単に平面の中にあるベクトルの大きさを求めるとなると、拠り所となる値がない状態では大きさを求めることは至難である。しかし、座標平面でのベクトルの大きさを求めることは簡単である。なぜなら、ベクトルの大きさとは始点から終点までの長さであり、これは直角三角形の斜辺の長さに等しいからである。一般に $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2)$ とすると、三平方の定理より

$$\boxed{|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

となる。これは、ベクトルが x 軸や y 軸に平行な場合にも成り立っている。たとえば $\overrightarrow{a}$ が x 軸に平行ならば、$\overrightarrow{a}$ は原点 O を始点として x 軸上にあるものと考えてよい。すなわち $\overrightarrow{a} = (a_1,\ 0)$ である。よって

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2} = |a_1|$$

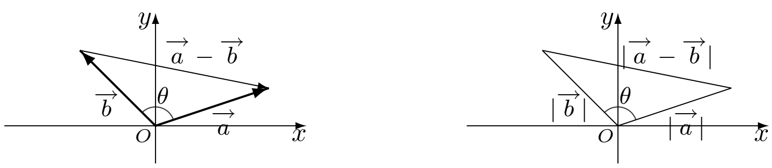
となっている。

座標平面での内積

ベクトルの内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ は $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ であったので、$\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2)$、$\overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2)$ とすると

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\cos\theta}$$

と書き直すことができる。これだけのことでも、内積の計算が具体的になった価値はあるのだが、実際はそれ以上の恩恵が得られていることを述べておく。



ベクトルで表された図を改めて線分で表された図に見直し、そこに余弦定理を当てはめると

$$|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 - 2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

であるが、関係式の中にある $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ は、まさにベクトルの内積そのものである。よって

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2)$$

であるが、$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$ より、$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$ を代入して計算すると

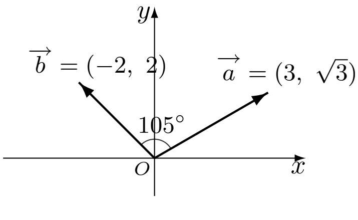
$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2+\left(\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right)^2-\left(\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-(a_1^2-2a_1b_1+b_1^2)-(a_2^2-2a_2b_2+b_2^2)\right\}\\ &= \frac{1}{2}(2a_1b_1+2a_2b_2)\\ &= a_1b_1+a_2b_2\end{aligned}$$

というように、まったく簡単な式に変形できてしまうのである。つまり座標平面におけるベクトルの内積は、終点の座標を互いに掛けて和を求めるだけで計算できることが分かったのである。

$$\boxed{\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2)\text{、}\overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2)\text{ のとき}\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2}$$

内積の計算例と効用

具体的なベクトルを用いて、内積の計算を 2 通りの方法で試してみよう。



たとえば $\overrightarrow{a}=(3,\ \sqrt{3})$、$\overrightarrow{b}=(-2,\ 2)$ とすると、$\overrightarrow{a}$ が x 軸となす角は 30°、$\overrightarrow{b}$ が x 軸となす角は 135° であるから、2 つのベクトルのなす角は 105° となる。$\cos 105^\circ$ は三角比の加法定理から

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ+45^\circ)\\ &= \cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

である。これより、まず定義通りに内積を計算すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}\sqrt{(-2)^2+2^2}\cos 105^\circ \\ &= 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ &= 2\sqrt{3}-6\end{aligned}$$

となり、これは座標を用いて計算した

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 3\cdot(-2)+\sqrt{3}\cdot 2 = -6+2\sqrt{3}$$

に一致している。

内積の分配法則

ここで、以前触れなかった内積による分配法則

$$\boxed{\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}}$$

を証明しておこう。$\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2)$、$\overrightarrow{c}=(c_1,\ c_2)$ とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}) &= (a_1,\ a_2)\cdot\{(b_1,\ b_2)+(c_1,\ c_2)\} && \text{(成分で表示)} \\ &= (a_1,\ a_2)\cdot(b_1+c_1,\ b_2+c_2) && \text{(和の性質)} \\ &= (a_1b_1+a_1c_1,\ a_2b_2+a_2c_2) && \text{(内積の定義)} \\ &= (a_1b_1,\ a_2b_2)+(a_1c_1,\ a_2c_2) && \text{(和の性質)} \\ &= (a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)+(a_1,\ a_2)\cdot(c_1,\ c_2) && \text{(内積の定義)} \\ &= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} && \text{(ベクトルで表示)}\end{aligned}$$

であるから、内積においても分配法則が成り立っていることが分かる。

ところで $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{a}|\cos\theta$ であるが、同じベクトルのなす角 θ は 0° だから、$\cos\theta=1$ である。このことから

$$\boxed{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2}$$

であることが分かる。これにより内積においては、文字式の展開公式のような関係

$$\boxed{\begin{aligned}(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}) &= |\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2 \\ (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}) &= |\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2\end{aligned}}$$

が成り立つことが確かめられる。実際、分配法則を適用することで

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}) &= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \\
&= |\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2 \\
(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}) &= \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \\
&= |\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2
\end{aligned}
$$

となることが分かる。

* * *

ベクトルの内積は文字式の計算とは根本的に異なるので、$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ は $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})^2$ ではない。ただし、内積の定義より

$$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|\cos 0^\circ$$

であるから

$$\boxed{(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2}$$

と書くことは正しい。このことは $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$ において、$\overrightarrow{a}$ を $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ に置き換えた場合になっている。▮