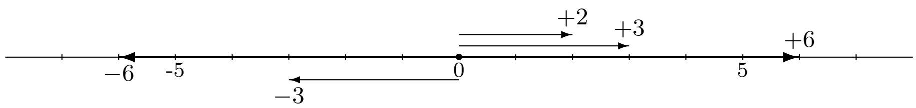
ベクトルと数直線

これまでにベクトルの和・差・実数倍について述べてきたので、次は商—割り算—の定義をしたいところである。しかし、実際は積の定義さえできていないのである。ベクトルの実数倍は積の定義ではない。なぜなら、ベクトルどうしを掛けているわけではないからである。実数倍はあくまでもベクトルに実数を掛けているに過ぎない。

ベクトルどうしの積を考える前に、数直線上における、実数の掛け算を振り返ることにしよう。そうする理由は、実数も数直線上のベクトルだからである。



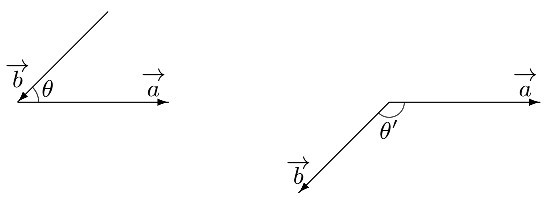
図は $(+2)\times(+3)=(+6)$、$(+2)\times(-3)=(-6)$ を表している。いくつかのベクトルは数直線から離れて描いているが、実際は数直線上のベクトルと見てもらいたい。さて、この様子から実数の掛け算をベクトルで考えた場合、ベクトルの向きに右か左かの違いはあっても、ベクトル自体は数直線から外れることはない。つまり、積というものは一直線上の演算だということになる。その点で、平面上のベクトルは必ずしも一直線上にあるわけではないので、積を定義するのが難しくなっているのである。

ベクトルの内積

そこで少し作為的ではあるが、2 つのベクトルが与えられたとき、それらが一直線上になるように手を加えて積の定義にしたらどうだろうか。手を加えるというのは、一方のベクトルをもう一方のベクトルに**射影**するのである。どちらを射影する対象にしてもよいのだが、射影するためには 2 つのベクトルが作る角の大きさを知る必要がある。このとき、2 つのベクトルが

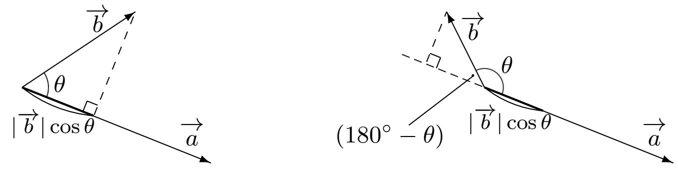
> 共通の始点の周りに作る角のうち、180° 以下になる側の角を、**ベクトルのなす角**という

ことにする。ここで注意したいのは、共通の始点の周りに作る角を “なす角” と呼ぶことである。



このことは、左図のように 2 つのベクトルが大きさ θ で交わるように見えても、実際のなす角は始点を一致させた場合の θ' であることを意味するのである。

ベクトルのなす角を θ とすると、θ が 90° より小さいか大きいかで扱いが違ってくるが、いずれにしても $\cos\theta$ を掛けることで一方を他方に射影できる。



図はどちらも $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{a}$ に射影しているが、射影したベクトルに絶対値がついていることに注意してもらいたい。θ が 0° でない限り、$\overrightarrow{a}$ に "射影された $\overrightarrow{b}$" が持つ方向は、"元のベクトル $\overrightarrow{b}$" が持つ方向とは異なっている。$|\overrightarrow{b}|\cos\theta$ ではなく $\overrightarrow{b}\cos\theta$ と書いてしまうと $\overrightarrow{b}$ の実数倍を意味するので、$\overrightarrow{b}$ が持つ方向は変わらない。これでは $\overrightarrow{a}$ に射影したことにならないので、絶対値をつけて書いたのである。また、右の図は $|\overrightarrow{b}|\cos\theta$ の向きが逆に思えるかもしれないが、この場合は $\theta > 90^\circ$ であるから、これでよい。なぜなら、$\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{a}$ の延長上—破線上—に射影すると

$$|\overrightarrow{b}|\cos(180^\circ - \theta) = -|\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

となって、$|\overrightarrow{b}|\cos\theta$ と逆向きになっているからである。

さて、これで $|\overrightarrow{b}|\cos\theta$ と $\overrightarrow{a}$ が一直線上に乗ったので、$\overrightarrow{a}$ も大きさだけを取り出して $|\overrightarrow{a}|$ を用いて掛け算をすれば、数直線上のベクトルの計算と同じことになるだろう。実際、$\theta < 90^\circ$ のときは同符号の積、$\theta > 90^\circ$ のときは異符号の積に対応している。以上のことから、ベクトルどうしの積を記号 "$\cdot$" を用いて

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta}$$

と定義しよう。これは、**ベクトルの内積**と呼ばれる演算である。

また、$\overrightarrow{a}$ か $\overrightarrow{b}$ の少なくとも一方が $\overrightarrow{0}$ であるときは、$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ のなす角 θ を考えることはできない。すると $\cos\theta$ の値も考えることができないので、内積の計算もできないことになる。しかし、たとえば $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ なら $|\overrightarrow{a}| = 0$ であるから、$\cos\theta$ の値に関わらず $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ としてよいだろう。少し曖昧な決め方に見えるだろうが、これでよいことが後ではっきりする。

* * *

ベクトルどうしの積を単純に "積" と呼ばないのは、積の定義の仕方に別の方法があることと、一般の積と区別したいからである。また、わざわざ "ベクトルの" 内積とことわるのは、ベクトル以外にも内積と呼ばれる演算が存在するからである。

ところで、一般に文字どうしの積は記号を省いて ab などとすることが多いし、数値どうしなら 2×3 のように書くだろう。そう考えると、ベクトルの内積も $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$ や $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ でもよいと感じるかもしれないが、内積は必ず記号 "$\cdot$" を用いなくてはならない。記号の省略や $\times$ の使用は別の意味になってしまうからである。▮

内積の性質

内積は数直線上の数の積を内包した、ベクトルどうしの積と考えてよいのだが、普通の掛け算を内包している以上、内積にはこれまで通りの計算法則が成り立っていてほしい。始めに、

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{交換法則} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} \\ \text{結合法則} & (k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(k\overrightarrow{b})=k(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}) \end{array}}$$

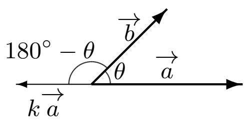
が成り立つことを示す。

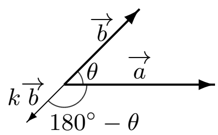
交換法則が成り立つことは

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}|\cos\theta=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$$

から直ちに分かることである。内積の定義が $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ なのだから当たり前と思うかもしれないが、定義はあくまでも $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ の順に積をとるように記述してある。$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ の順を $|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}|$ の順にできることは定義からではなく、実数の掛け算の性質からであることに注意されたい。

結合法則が成り立つことは、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすれば、実数倍したベクトルに関してもなす角は θ であることに注意するとよい。$k>0$ ならば、結合法則が成り立つことは明らかである。しかし、$k<0$ のときはそれほど明らかではない。





$k<0$ の場合は $k\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角は $(180^\circ-\theta)$ である。これより

$$(k\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=|k\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(180^\circ-\theta)=-|k||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

であり、同様に $\overrightarrow{a}\cdot(k\overrightarrow{b})=-|k||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ である。それに対し

$$k(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})=k|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

であるが、$k<0$ なので $-|k|=k$ である。ゆえに、結合法則は成り立っている。

他に分配法則があるが、これについては後述することにしたい。

ベクトルの垂直

ベクトルの内積を考えることで、数直線上の掛け算のような計算ができたのであるが、注意しなければいけないことがある。数直線上における数の積は、数を単に大きさを表すものとして扱えば、(大きさ) と (大きさ) の積が (大きさ) になることに異論はない。また数をベクトルとして扱えば、(ベクトル) と (ベクトル) の積が (ベクトル) であることは自然であろう。しかし、ベクトルは内積が (ベクトル) $\cdot$ (ベクトル) であるのに対し、その結果得られるものは $|\overrightarrow{a}|$、$|\overrightarrow{b}|$、$\cos\theta$ の積であるから (大きさ) の実数倍に過ぎないのである。

すると、内積で得た値が何を意味するかがはっきりしないように思える。しかし、$\theta = 0°$ のときは $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ であり、$\theta = 180°$ のときは $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|$ であるのだから、明らかに同じ向きのベクトルの内積が正の値で、正反対の向きのベクトルの内積が負の値になる点で、数直線上のベクトルの積を完全に含んでいる。

たしかにベクトルの内積から得られる数値は曖昧な印象を与えるが、内積の値が 0 になるときは大変特徴的な意味を持つ。$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ になるには $\cos\theta = 0$、すなわち $\theta = 90°$ であるときである。このことから

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}}$$

がいえる。すなわち、ベクトルの内積が 0 かどうかで、2 つのベクトルが垂直かどうかが分かるのである。これは、図形の直交性を調べるために、ベクトルの内積が有効に使えることを示している。