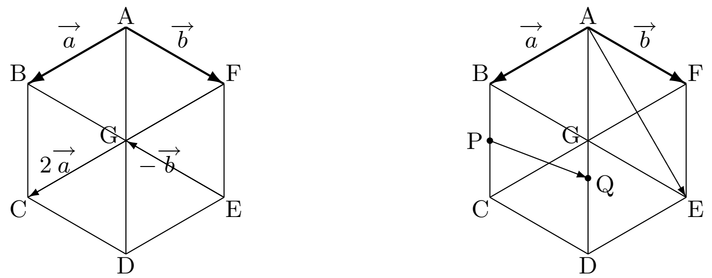
与えられたベクトルで表す

ベクトルに加法・減法と、それに実数倍の考えを取り入れたことで、ベクトルに対して計算のようなことができることは分かった。しかし、それだけでは自在に計算ができたことにはならない。では、ベクトルで自在に計算ができるとは、どういうことであろうか。



いま正 6 角形 ABCDEF について、$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$、$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ であるとする。ベクトルの定義から、$\overrightarrow{FC}=2\vec{a}$ であるとか、$\overrightarrow{EG}=-\vec{b}$ であるとかは分かるのであるが、これではベクトルを自在に計算したとは思えないであろう。自在に計算ができるとは、右の図においてたとえば $\overrightarrow{AE}$ や $\overrightarrow{PQ}$ が $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表すことができることを指すのである。

$\overrightarrow{AE}$ は始点が A、終点が E であるから、そうなるように正 6 角形上の線分を継ぎ足して考えれば

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE}$$

である。要するに一筆書きの要領だ。そして、右辺のベクトルはいずれも $\vec{a}$ か $\vec{b}$ であることから、

$$\overrightarrow{AE}=\vec{b}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$$

となっていることが分かる。このとき別の継ぎ足し方として、$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GE}$ と考えても $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}$、$\overrightarrow{GE}=\vec{b}$ なので、結局は同じ結果になる。

また、P を BC の中点、Q を GD の 3 等分点のうち G に近い点としたとき

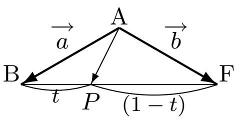
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GQ}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{a}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{-\vec{a}+5\vec{b}}{6}$$

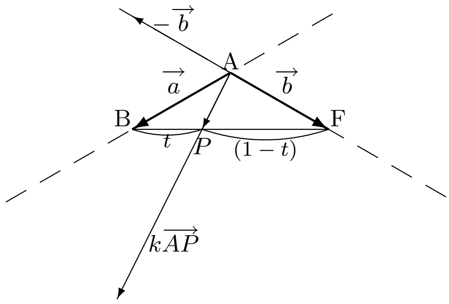
となっていることも分かるであろう。

$\overrightarrow{AE}$ は始点と終点が正 6 角形の頂点にあるから、$\vec{a}$、$\vec{b}$ で表されることに不思議はないとしても、$\overrightarrow{PQ}$ は始点と終点が頂点になくても $\vec{a}$、$\vec{b}$ で表されている。しかしそれは、よく考えればベクトルの性質上当たり前のことである。そうであれば、正 6 角形の近くのベクトルは、どんなものでも $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すことができるような気がする。実際、このようにとった $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で平面上のすべてのベクトルを表せるのでる。

独立なベクトル

いま、正 6 角形上で考えているベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ で、平面上のあらゆるベクトルが表せることを説明してみよう。





まず、線分 BF を $t:(1-t)$ に内分することを考えよう。すると $\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ であるから、A を始点とし線分 BF 上の点を終点とするベクトル $\overrightarrow{AP}$ が $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で表せたことになる。さらに、$\overrightarrow{AP}$ を k 倍すると、図の $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ に挟まれた下側に放射状に延びるすべてのベクトルも表せることが分かる。$k<0$ なら、その鏡像にあたるベクトルが反対側にできることになる。

これだけでは図の上下方向のベクトルしか表せないことになるが、たとえば $-\overrightarrow{b}$ を考えることによって、$\overrightarrow{a}$ と $-\overrightarrow{b}$ の終点を結ぶ線分を $t:(1-t)$ に内分することにすれば、同様に図の左右方向のベクトルも表せる。つまり、A を中心に 360° どの方向にも任意の大きさのベクトルが作れることになるのである。このとき、始点は A に限らず、平面上のあらゆる場所にとれるわけだから、平面上の任意の点を始点とするすべてのベクトルが表せるのである。

いまの例で 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ によって、他のあらゆるベクトルが表せるのは、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が**線型独立**であるからである。独立というのは、$\overrightarrow{a}$ を $\overrightarrow{b}$ で表すことができず、また、$\overrightarrow{b}$ も $\overrightarrow{a}$ で表すことができないということである。もし、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が同じ方向を向いているベクトルならば、$\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a}$ と表せてしまう。このようなときは**線型従属**であるという。この場合は $\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a}$ であることから、どんな実数 m、n に対しても

$$m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}=m\overrightarrow{a}+nk\overrightarrow{a}=(m+nk)\overrightarrow{a}$$

となってしまい、$\overrightarrow{a}$ と平行なベクトルしかできないのである。ちなみに線型というのは、ベクトルが線状であることに由来しているだけであって、重要なのは独立かどうかなのである。

ベクトルが線型独立であることを端的に言うならば

$$\boxed{\overrightarrow{a} \text{ と } \overrightarrow{b} \text{ が線型独立} \quad \Longleftrightarrow \quad m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0} \text{ を満たすのは } m=n=0 \text{ に限る}}$$

となる。このことを簡単に証明しておこう。

[証明]

I) 「$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が独立 $\Rightarrow$ $m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ を満たすのは $m=n=0$ に限る」ことを示す。

もし、$m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ を満たすものが $m=n=0$ 以外にあったとする。それが $m\neq 0$ であったとし、n については不問としよう。すると $\overrightarrow{a}=-\dfrac{n}{m}\overrightarrow{b}$ と書けることになって、$\overrightarrow{a}$ が $\overrightarrow{b}$ で表せることになる。すなわち従属である。$n\neq 0$ としても同じことである。すなわち、m、n が 0 でなければ $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ が独立でないことが示せた。ゆえに、$m=n=0$ でなければならない。

II) 「$m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ を満たすのは $m=n=0$ に限る $\Rightarrow$ $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が独立」であることを示す。

もし、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が独立でない—つまり従属である—とする。従属であればたとえば $\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a}$ と表すことができるので、$m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ であることと $m\overrightarrow{a}+nk\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ であることは同じことになる。これは $(m+nk)\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ ということなので、何も $m=n=0$ でなくとも、たとえば $m=n=1$、$k=-1$ でもよいことが示せた。ゆえに、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は独立でなければならない。（以上）

* * *

証明の仕方にはいろいろあるものだが、i)「A である $\Rightarrow$ B である」ことを証明したいとき、ii)「B でない $\Rightarrow$ A でない」ことを証明してもよい。ここでは詳しく述べないが、ii) は i) の**対偶**と呼ばれ、i) の真偽と ii) の真偽は完全に一致する。したがって i) が真であることを示したいときは、ii) が真であることを示しても同じことである。そこで、上の証明では直接証明することを避け、対偶を示すことによって証明をしたのである。▮

位置ベクトル

ベクトルは、大きさが等しく向きが同じであるときは、等しいベクトルとして扱う。それは、たとえば三角形の合同を言うのに、三角形が置かれた位置や向きを無視することに似ている。このような考えはベクトルの自由度を高めるのに一役買っているのだが、どこにあってもよいことがかえって不安定な感じを与えるかもしれない。3 という数はどこで用いても 3 であることに違いないが、数直線上の 3 は、原点 0 から右方向に 3 離れた位置に定まる。一般に数はどこでも用いることができるが、数直線上では原点 0 に対する位置が固定される。このことが、数直線を安定した道具にしているのである。

ベクトルには始点と終点があるので、始点を定点 O に固定して考えるようにすれば、終点 A を表すベクトルは必ず $\overrightarrow{OA}$ となって、ベクトルは地に足がついたような安定感が出る。このように、定点 O を基準に据えて点 A をベクトルで表すとき、$\overrightarrow{OA}$ を**位置ベクトル**という。

このようにしておくと、2 点 A、B に対するベクトル $\overrightarrow{AB}$ は、$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ というように、必ず位置ベクトルで表せることになって便利である。

基本ベクトル

線型独立であるベクトルを位置ベクトルで表しておくと、あらゆるベクトルが独立であるベクトルを用いて表せることになる。このように、独立であるベクトルがあらゆるベクトルの基になっていることから、それを**基本ベクトル**と呼ぶことがある。たとえば数直線では、原点 0 から 1 へ向かうベクトル $\overrightarrow{e_1}$ が基本ベクトルである。なぜなら、$\overrightarrow{e_1}$ の実数倍によって、数直線上のすべての点を示すことができるからである。

平面上のすべてのベクトルを表すためには、線型独立である 2 つのベクトル $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ が必要である。$\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ が同じ直線上にさえなければよいのだが、$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ は直交させておくと便利なことが多い。平面における直交座標はそのような観点で設定されている。