ベクトル

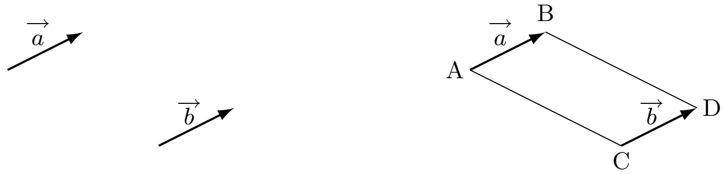
一般に**ベクトル**とは、**大きさ**と**向き**を持ったものと定義される。日常において、ベクトルの1つの例は風である。風の大きさとは風速のことで、たとえば5m/sのように数値で表わしている。風の向きとは風向きのことで、たとえば北北西の風のように言葉で表している。したがって、“北北西からの5m/sの風” という表現はベクトルである。

ベクトルにおいて大きさと向きがはっきりしないときは、未知数となる文字を用いて表す。単に a や b と書いたのでは数と区別がつかないので、$\overrightarrow{a}$ や $\overrightarrow{b}$ のように $\rightarrow$ を用いてベクトルであることを表現するか、$\boldsymbol{a}$ や $\boldsymbol{b}$ のように**ボールド体**を用いて単なる数値でないことを強調することが多い。

ベクトルが記述できれば、演算を定義することができる。演算に先立って、ベクトルは

$$\boxed{\overrightarrow{a} \text{ と } \overrightarrow{b} \text{ の大きさと向きが等しい} \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}}$$

と定義しておこう。つまりベクトルの位置は無視することになる。



等しいベクトルの**始点**どうしと**終点**どうしを結ぶと、図のように平行四辺形ができる。なぜなら $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ であれば、ベクトルの定義から $AB//CD$ かつ $AB = CD$ であることがいえる。よって、四角形ABDCは向かい合う辺が平行で長さが等しいので、平行四辺形である。

図において、$\overrightarrow{a}$ を $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{CD}$ と書いてもよく、この方が始点と終点がはっきりしてよいこともある。始点と終点が明確になると、たとえば $\overrightarrow{AB}$ の始点と終点を逆にしたベクトルは $\overrightarrow{BA}$ と書ける。このとき、$\overrightarrow{BA}$ は $\overrightarrow{AB}$ の**逆ベクトル**と呼ばれる。数直線上においては、大きさが等しい互いに逆向きの矢線は正負が逆であることから、ベクトルにおいても、互いに逆向きのベクトルの正負は逆であると決めよう。いまの例なら

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$$

と書くことになる。5と -5 が異なる値であるように、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BA}$ は異なるベクトルである。ただし、大きさの点では等しい。大きさを表すために、記号 $|\ |$ を使うことにすれば $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ と書き表すことができる。

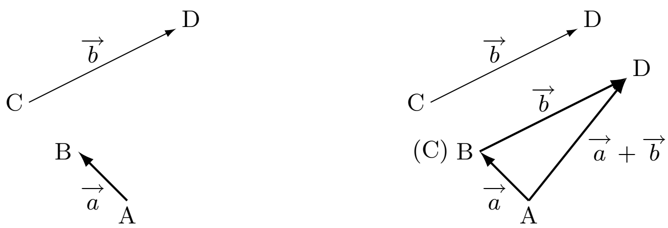
極端な例であるが、始点と終点がともに A というベクトルも考えてよい。すると、それは点と同じことになるのだが、あえて大きさも向きも持たないベクトルとみなし、**零ベクトル**または**ゼロベクトル**と呼んで $\overrightarrow{0}$ で表す。すなわち

$$\boxed{\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}}$$

である。一般に $\overrightarrow{XX} = \overrightarrow{0}$ ということが分かる。

ベクトルの加法と減法

ベクトルには加法が定義できる。数の加法が数直線上でのベクトルの継ぎ足しであったことを思い出してほしい。いま考えているベクトルは、数直線にとらわれないものであるから、加法は平面上で継ぎ足すことに相当する。



$\overrightarrow{a}$（$=\overrightarrow{AB}$）と $\overrightarrow{b}$（$=\overrightarrow{CD}$）を足すことを考えよう。ベクトルは平行移動しても同じことなので、$\overrightarrow{CD}$ を平行移動して、$\overrightarrow{CD}$ の始点 C を $\overrightarrow{AB}$ の終点 B に重ねると $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ ができ、その始まりは A、終わりは D であるから結果的に $\overrightarrow{AD}$ となる。すなわち $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ が成り立つ。この場合 B と C は一致しているので、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ と書いてもよい。一般にベクトルの加法では、X を中継点と考えると

$$\boxed{\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{AB}}$$

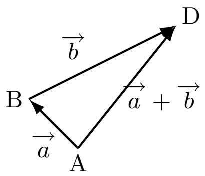
が成り立つ。

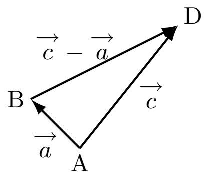
このことから、A を中継点と見て $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{AA}$ であるが、$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$ だったので $\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$ がいえる。すなわち $2\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$ なので、$\overrightarrow{0}$ は実数倍したところで $\overrightarrow{0}$ であることに変わりない。また、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ であるから、$\overrightarrow{BB}$ や $\overrightarrow{AA}$—つまり $\overrightarrow{0}$—を加えてもベクトルに変化はない。以上のことから

$$\boxed{n\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}、\quad \overrightarrow{x}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}}$$

が成り立つことが分かる。

減法は加法の裏の顔である。加法が $(\overrightarrow{a})+(\overrightarrow{b})=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ であれば、減法は左辺の $\overrightarrow{a}$ を右辺に移項して $(\overrightarrow{b})=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})-(\overrightarrow{a})$ と書ける。



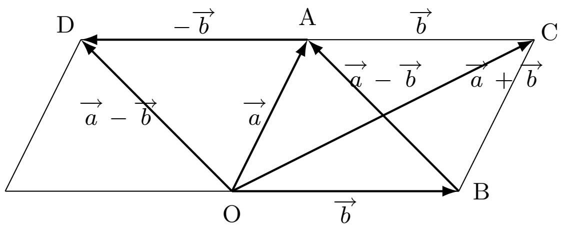


ここで $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ とおけば、移項して $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$ であるから、左図で $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ を $(\overrightarrow{c})$ に、$(\overrightarrow{b})$ を $(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})$ に置き換えれば右図となる。すると右図より $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$ とは $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ のことである。それが $\overrightarrow{BD}$ に等しいわけだから、$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$ が成り立つ。一般にベクトルの減法では、X を 2 つのベクトルの共通の始点と考えると

$$\boxed{\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{BA}}$$

が成り立つ。

ところで 2 つのベクトルは、平行四辺形の 2 辺に対応させることができた。平行四辺形 OACB において、$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$ とおくと $\overrightarrow{AC}$ も $\overrightarrow{b}$ に等しい。このことから $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ は平行四辺形の対角線上のベクトル $\overrightarrow{OC}$ に等しい。



同様に、減法の定義より $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ が対角線上のベクトル $\overrightarrow{BA}$ に等しいことも分かる。

また、$\overrightarrow{b}$ の逆ベクトルのひとつは $\overrightarrow{AD}$ であるから $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{b}$ とおくと、$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}$ から

$$\boxed{\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}$$

が成り立つ。さらに、$\overrightarrow{a}$ の逆ベクトルを $-\overrightarrow{a}$ で定義したが、図からも明らかなように、$-\overrightarrow{a}$ の逆ベクトルである $-(-\overrightarrow{a})$ は $\overrightarrow{a}$ である。これより

$$\boxed{-(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}}$$

が成り立つ。

以上のことからベクトルの加法・減法は、数の加法・減法と同じ性質を持つことが分かるのである。

*　*　*

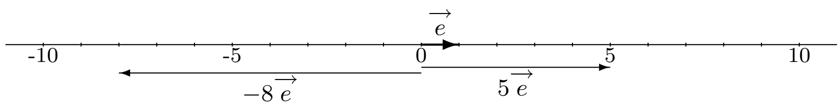
いま何気なく $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$ としたが、ベクトルが普通の等式と同様に移項してよいという保証はどこにもなかったのである。移項とは、等式において、両辺に同じ数を加えたとき、見かけ上成り立つ操作である。ベクトルにおいても、等しいベクトルに同じベクトルを継ぎ足しても等しいことに変わりないので、$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$ ならば $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{c}+(-\overrightarrow{a})$ は成り立つ。$\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}$ であるから、結局 $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$ のように、見かけ上移項したように考えてよいのである。▮

単位ベクトル

ところで、ベクトルは $\overrightarrow{0}$ でない限り大きさをもつ。$\overrightarrow{a}$ の大きさは絶対値記号を用いて $|\overrightarrow{a}|$ と書く。$|\overrightarrow{a}|$ は実数値であるから、$\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$ は大きさが 1 のベクトルになる。これを**単位ベクトル**と呼び、$\overrightarrow{e}$ で表すことがある。

$$\boxed{\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}=\overrightarrow{e}\ \text{（単位ベクトル）}}$$

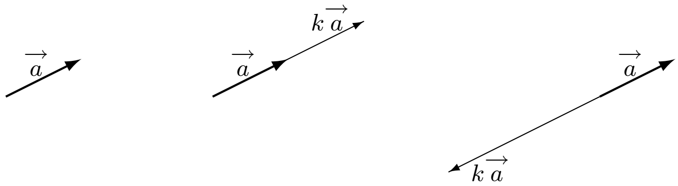
数直線上の点をベクトルと見れば、数直線上の単位ベクトルは原点 0 から 1 へ向かうベクトルである。



このことから、数値 5 は $5\overrightarrow{e}$、-8 は $-8\overrightarrow{e}$ と考えてよい。しかし $5\overrightarrow{e}$ などと書くと、数直線から外れて描いてもよいので、数値と考えるには少し抵抗があるかもしれないが、早い時期に同一視できるようになるのが望ましい。

ベクトルの実数倍

数直線上の単位ベクトルを何倍かすることは、数直線上の任意の実数を示すことでもある。このことをもう少し広い視野で見ると、ベクトルは何倍かして新たなベクトルとすることができる。これを**ベクトルの実数倍**という。



$\overrightarrow{a}$ に対して $k\overrightarrow{a}$ とは、$\overrightarrow{a}$ の長さを k 倍したベクトルのことである。$k>0$ ならばベクトルは同じ向きに、$k<0$ ならば逆向きに $|k|$ 倍されることになる。$\overrightarrow{a}$ に数直線を重ねると、ベクトルの実数倍は、まさに数直線上で行ってきた数の掛け算であることが分かる。また、$0\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ と定める。

* * *

ここでは $0\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ と定めることにした。$0\overrightarrow{a}$ というのは実数 0 とベクトル $\overrightarrow{a}$ の掛け算にあたるのだが、数の計算においては、0 に何を掛けても 0 になるという約束があるので、たとえ掛けるものがベクトルであっても結果は 0 であると決めることもできるだろう。実際、$\overrightarrow{a}$ を数直線上の任意の数を表すと考えれば、$0\overrightarrow{a}$ を 0 と見ても不自然ではない。しかし同時に、3 という実数がベクトルであることと同じく、数 0 もベクトルであるから、$0\overrightarrow{a}$ を $\overrightarrow{0}$ と見てもかまわないように思える。それなら、3 を実数と見たりベクトルと見たりするように、$0\overrightarrow{a}$ も 0 と見たり $\overrightarrow{0}$ と見たりすればよいと思うかもしれないが、実数倍という**演算**が複数の結果になることは避けなければならないだろう。

複数の結果が出てまずいのなら、**未定義**とすることがある。たとえば $a\div 0$ は、a が 0 かそうでないかによって結果が異なる。そのため、0 で割る計算は定義されない。もし、$0\overrightarrow{a}$ が場合によって異なる結果になるのなら、未定義にするのが無難である。しかし、妥当な解釈をするなら $0\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ であって、0 ではない。そのことを説明しておこう。

まず、数の計算において $5-2=3$ を $5\overrightarrow{e}-2\overrightarrow{e}=3\overrightarrow{e}$ と見ることにしたので、3 を $5-2$ に置き換えて $5\overrightarrow{e}-2\overrightarrow{e}=(5-2)\overrightarrow{e}$ が成り立つと考えてよい。一般に、ベクトルは分配法則

$$m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{a}=(m+n)\overrightarrow{a} \quad (※)$$

が成立する。$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$ として、$0\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ であることを示してみよう。

$$\begin{aligned}
0\overrightarrow{a} &= 0\overrightarrow{AB} \\
&= (k-k)\overrightarrow{AB} && (0\text{ は実数なので } k-k \text{ と見た}) \\
&= k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AB} && (※\text{を適用}) \\
&= k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BA} && (-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\text{より}) \\
&= \underbrace{\overrightarrow{AB}+\cdots+\overrightarrow{AB}}_{k\text{ 個}}+\underbrace{\overrightarrow{BA}+\cdots+\overrightarrow{BA}}_{k\text{ 個}} && (\text{実数倍の定義}) \\
&= \underbrace{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+\cdots+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})}_{k\text{ 個}} && (\text{前半分の}\overrightarrow{AB}\text{と後半分の}\overrightarrow{BA}\text{を組に}) \\
&= \underbrace{(\overrightarrow{AA})+\cdots+(\overrightarrow{AA})}_{k\text{ 個}} \quad = \quad \overrightarrow{AA} && (\text{ベクトルの和の性質}) \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

計算をする際に使ったのは、ベクトルの定義に関することがらだけである。定義だけから $0\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ が示せたので、このことは定理と考えてもよいかもしれない。▮