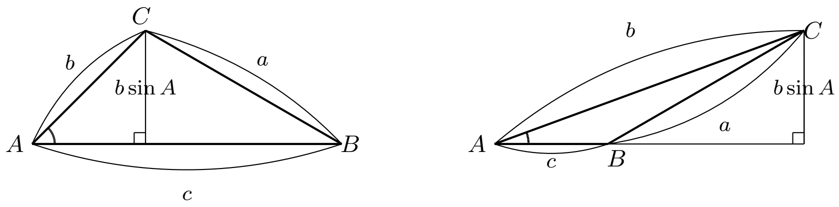
三角形の面積

三角形の面積が (底辺) $\times$ (高さ) $\div$ 2 で求められることは小学校から馴染んでいることだろう。底辺を c、高さを h とすれば (面積) $= \dfrac{1}{2}ch$ と書くことになる。



さて $\triangle ABC$ において、底辺を c、高さを h とした場合、鋭角三角形でも鈍角三角形でも $h = b\sin A$ と書ける。このことから

$$(\text{面積}) = \frac{1}{2}bc\sin A$$

でも面積が計算できることが分かる。どの頂点から垂線を下ろしても同じ結果になるので

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ S &= \frac{1}{2}ca\sin B \\ S &= \frac{1}{2}ab\sin C \end{aligned}}$$

は、どれも同じことを表している。

ヘロンの公式

三角形の面積を求める公式に**ヘロンの公式**がある[1]。それは、三角形の 3 辺の長さから面積 S を求める式で

$$\boxed{S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \left(\text{ただし } s = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)}$$

というものである。私はヘロンが公式を導いた手順を知らないのだが、余弦定理と三角形の面積の公式さえあれば、比較的簡単に公式を導ける。余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

[1]アレクサンドリアのヘロン（3 世紀?B.C.–2 世紀?B.C.）：アレクサンドリアで活躍したギリシャ人工学者、数学者。

を $\cos A$ について解くと

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

が得られる。また、三角形の面積の公式で使う $\sin A$ を利用するため

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ を移項した } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

を計算することにする。この式を因数分解した上で、先の $\cos A$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\sin^2 A &= (1 + \cos A)(1 - \cos A) \\
&= \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\
&= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \\
&= \frac{\{(b + c)^2 - a^2\}}{2bc} \cdot \frac{\{a^2 - (b - c)^2\}}{2bc} \\
&= \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc} \cdot \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc} \\
&= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4b^2c^2}
\end{aligned}$$

まで持っていける。ここで見通しをよくするために $a + b + c = t$ とおくと

$$\sin^2 A = \frac{t(t - 2a)(t - 2c)(t - 2b)}{4b^2c^2}$$

である。よって $\sin A = \dfrac{\sqrt{t(t - 2a)(t - 2b)(t - 2c)}}{2bc}$ を得るので、$S = \dfrac{1}{2}bc \sin A$ に代入して

$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{\sqrt{t(t - 2a)(t - 2b)(t - 2c)}}{2bc} = \frac{1}{4}\sqrt{t(t - 2a)(t - 2b)(t - 2c)}$$

を得る。公式にするなら、この形でも十分実用になるのでかまわないのであろうが、式中から余分な数を排除したものが公式になっている。そうするためには

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{4}\sqrt{t(t - 2a)(t - 2b)(t - 2c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{2\left(\frac{t}{2}\right)2\left(\frac{t}{2} - a\right)2\left(\frac{t}{2} - b\right)2\left(\frac{t}{2} - c\right)} \\
&= \sqrt{\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2} - a\right)\left(\frac{t}{2} - b\right)\left(\frac{t}{2} - c\right)}
\end{aligned}$$

としておく。いまは $a + b + c = t$ とおいていたので、$\dfrac{t}{2} = \dfrac{a + b + c}{2}$ である。そこで改めて $\dfrac{t}{2} = s$ とおくと、ヘロンの公式になるのである。

その他の面積公式

三角形の合同条件には

a)	対応する 3 辺の長さがそれぞれ等しい
b)	対応する 2 辺の長さとその間の角の大きさがそれぞれ等しい
c)	対応する 1 辺の長さとその両端の角の大きさがそれぞれ等しい

の 3 種類があった。合同条件は、三角形の形が 1 つに決まる条件でもある。形が決まれば面積も確定しているはずである。それはそのとおりで、$S=\dfrac{1}{2}\sin A$ は b) に、ヘロンの公式は a) に対応した面積の公式である。すると、c) に対応した面積の公式があってもよい。

三角形の面積の式 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ と正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ を用いることにする。正弦定理を変形した

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$

を面積の式に代入すると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{c\sin B}{\sin C}\cdot c\sin A=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin C}$$

である。式としては、3 つの角 A、B、C の正弦と 1 辺 c の平方で表されて均整がとれている。しかし、1 辺と両端の角による三角形の面積というからには、辺 c と角 A、B だけで表したい。

ところが三角形の内角には $A+B+C=180^\circ$ という関係があるので、$C=180^\circ-(A+B)$ である。このことから

$$\sin C=\sin\{180^\circ-(A+B)\}=\sin(A+B)$$

を使えばよいので、結局

$$S=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A+B)}$$

が 1 辺と両端の角を使った三角形の面積を求める式となる。この関係は他の辺と角の組合せでも同じなので

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin(A+B)} \\ S &= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)} \\ S &= \frac{b^2}{2}\cdot\frac{\sin C\sin A}{\sin(C+A)} \end{aligned}}$$

が得られる。ただ、この公式はあまり目に触れないと思われる。それは式が少々込み入っているからではなく、単に使われる場面がないだけであろう。そう考える理由は、式が至極単純でもあまり目に触れない面積の公式があるからだ。

その単純な面積公式を最後に取り上げよう。R を三角形の外接円の半径とした

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$$

である。この式は導き方も簡単で、面積の公式 $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ に正弦定理から得られる $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ を代入して

$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

とするだけである。

式の簡単さから覚えて損はない式のようだが、外接円の半径と組み合わせて三角形の面積を求めることは滅多にないだろう。しかし逆の発想をするならば、三角形の 3 辺の長さと面積が分かっていれば、この公式から外接円の半径が求められることになる。もちろん、そのような場面は少ないかもしれないが。