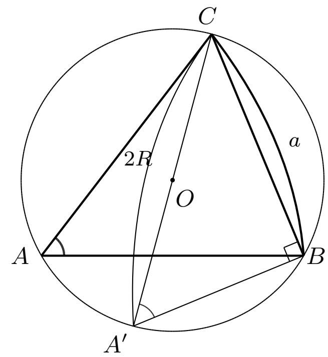
正弦定理

一般の三角形には直角があるとは限らないので、即座に三角比が適用できるわけではない。直角がなければ、どこかの頂点から垂線を下ろせばよいのだが、三角形の外接円を利用しても直角を作ることができる。たとえば直角三角形でない $\triangle ABC$ に対して、外接円の中心 O を通る弦 $A'C$ を一辺とする $\triangle A'BC$ を作ると、それは $\angle B = 90°$ の直角三角形となる。



$\angle B$ が弧 $A'C$ に対する円周角であることに注意すると、弧 $A'C$ に対する中心角が $180°$ であることから、$\angle B$ は中心角の $\dfrac{1}{2}$ である $90°$ となる。外接円の半径を R とすると、$\triangle A'BC$ の斜辺は $2R$ となる。$\triangle ABC$ において $\angle A$ の向かいの辺を a と書く習慣から $BC = a$ である。以上のことから

$$\sin A' = \frac{a}{2R}$$

が分かった。$\angle A'$ と $\angle A$ は弧 BC の円周角であるから等しい。よって、$\sin A = \dfrac{a}{2R}$ でもある。この式は両辺に $\dfrac{2R}{\sin A}$ を掛けると $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ になる。このことは三角形は、ある角とその角に向かい合う辺を用いた正弦比は一定で、その値は外接円の半径の長さの 2 倍であることを意味している。三角形の別の頂点で同じ考察をしても結果は同じなので、結局

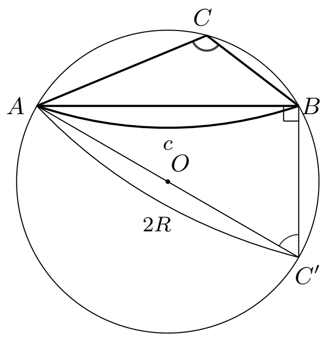
$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (R \text{ は外接円の半径})}$$

という関係式が導かれた。これを**正弦定理**という。

図を見ると、正弦定理を導くために直角三角形を補助的に描いているが、定理が正しいことが証明されてしまえば図の中に直角を見る必要はない。このことから、直角三角形に対して定義された三角比が、直角を離れて単に三角形の 1 つの角の値から求められることが分かる。三角比が直角三角比と限定的に呼ばれない所以（ゆえん）である。

三角形が鈍角を含むときの考察もしておきたい。$\triangle ABC$ において $\angle C$ が鈍角であるとする。三角比を用いるため外接円の直径を引いて直角を作るのだが、このときにできる円周角は C の反対側にできる。

図より $\sin C' = \dfrac{c}{2R}$ であるが、今度は $\angle C' \neq \angle C$ であるから $\sin C'$ を $\sin C$ に置き換えることはできない。しかし、四角形 $ACBC'$ は円に内接する四角形であることに注意しよう。



その場合

$$\boxed{\text{円に内接する四角形の向かい合う内角の和は } 180^\circ \text{ である}}$$

という事実から、$C + C' = 180^\circ$ である。このことから

$$\sin C' = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

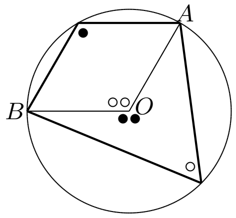
がいえるので、鈍角 C に対しても $\sin C = \dfrac{c}{2R}$ が成り立つのである。

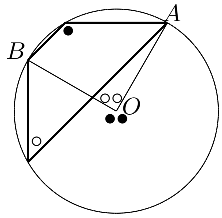
鋭角と鈍角について正弦定理が成り立つことは分かった。直角についてはどうだろうか。その場合は上の図で $\triangle ABC'$ を見るとよい。ここで $\sin B = \dfrac{b}{2R}$ が成り立つことを示したいのだが、B が 90° では図形的に求められるのは $\sin A$ か $\sin C$ であって $\sin B$ ではない。しかし、拡張した三角比を持ち出せば $\sin B = \sin 90^\circ = 1$ であることが分かる。また B の向かいの辺は b で表す習慣だが、この場合は $b = 2R$ である。よって $\dfrac{b}{2R} = \dfrac{2R}{2R} = 1$ であることも分かる。結局 $\sin B = \dfrac{b}{2R}$ は等式として正しいのである。

これで、どのような角に対しても正弦定理が成り立つことが示された。

*　*　*

円に内接する四角形の向かい合う内角の和が 180° であることは、円周角の大きさは中心角の大きさの $\dfrac{1}{2}$ であることから直ちに分かる。

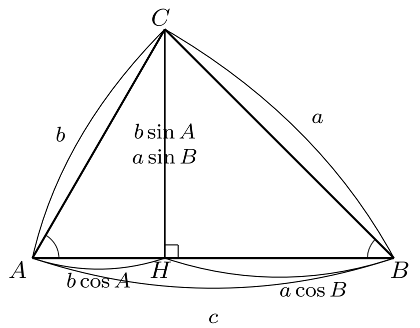




内接四角形の内部に、円の中心 O があるかないかで図形の印象は変わってくるが、結局は中心角と円周角の関係を見れば明らかである。いずれの場合も、弧 AB に対する中心角と円周角を見てほしい。中心角の合計（$\circ\circ + \bullet\bullet$）$360^\circ$ に対して、円周角の合計（$\circ + \bullet$）が 180° であることが分かるはずだ。▌

余弦定理

一般の三角形において直角を作るために、外接円を利用して正弦定理を導いたが、直角を作るには頂点から垂線を下ろせば済むことは前に述べた。このような場合に成り立つ関係を調べよう。



頂点 C から垂線 CH を下ろした場合、CH の長さは $b\sin A$ であり、かつ $a\sin B$ でもある。すると $b\sin A = a\sin B$ より $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ が得られるが、これは正弦定理そのものである。

視点を別のところへ移そう。$\triangle ACH$ を見ると、$AH = b\cos A$ であることが分かる。また、$\triangle BCH$ を見ると、$BH = a\cos B$ であることも分かる。合わせると辺 AB であるから

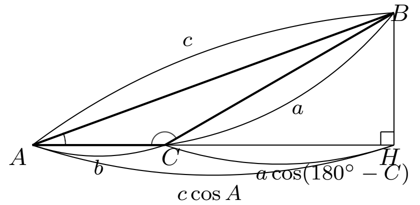
$$c = a\cos B + b\cos A$$

が成り立つ。別の頂点を選んで垂線を下ろしても結果は同じなので、結局

$$\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \quad \ldots(1) \\ b &= c\cos A + a\cos C \quad \ldots(2) \\ c &= a\cos B + b\cos A \quad \ldots(3) \end{aligned}$$

が導かれる。これは**余弦定理**と呼ばれる。

三角形が鈍角を含む場合も考察しておこう。



図より

$$b = c\cos A - a\cos(180^\circ - C)$$

であるが、$\cos(180^\circ - C) = -\cos C$ から直ちに $b = c\cos A + a\cos C$ が得られる。結局、鈍角三角形であっても同じ関係式が導かれることが分かる。

さて、(1)〜(3) の式は均整がとれていてきれいなのだが使い勝手がよくない。そこで、(2) を変形して $\cos C = \dfrac{b - c\cos A}{a}$ を、(3) を変形して $\cos B = \dfrac{c - b\cos A}{a}$ を、それぞれ (1) に代入すると

$$a = b \cdot \frac{b - c\cos A}{a} + c \cdot \frac{c - b\cos A}{a}$$

となるので、両辺に a を掛けて整理すると

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

が得られる。(1) や (3) を変形して代入しても同じことができ、結局

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a^2 &=& b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &=& c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &=& a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{array}}$$

が導かれる。これもまた**余弦定理**であるが、単に余弦定理と言った場合はこちらを指すことが多い。

もし 1 番目の式で、$\angle A = 90^\circ$ ならば $\cos A = 0$ であるから、式は $a^2 = b^2 + c^2$ となり、三平方の定理そのものとなる。つまり、余弦定理とは三平方の定理を拡張したものとなっている。