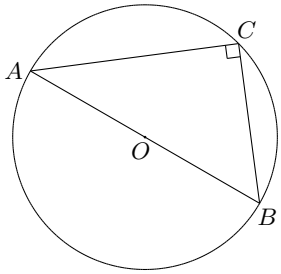
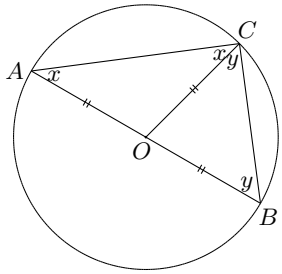
直角三角形と円

直角三角形と円は大変相性が良い。というのは、円の直径の両端と円周上の**任意の**点を結んでできる三角形は、必ず直角三角形になるからである。円周上の任意の点と言ったが、もちろん直径の両端の点は任意の点としてとることができない。





円の直径の両端 AB と円周上の任意の点 C を結んでできる三角形が必ず直角三角形になることは、次のようにして証明できる。右の図において中心 O と頂点 C を結ぶと、OA、OB、OC は円の半径であるから、$OA = OC$、$OB = OC$ である。このことから $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ はともに二等辺三角形となる。二等辺三角形の底角は等しいので、等しい角をそれぞれ x、y とする。また、三角形の内角の和は 180° であるから、$\triangle ABC$ において

$$x + x + y + y = 180^\circ$$

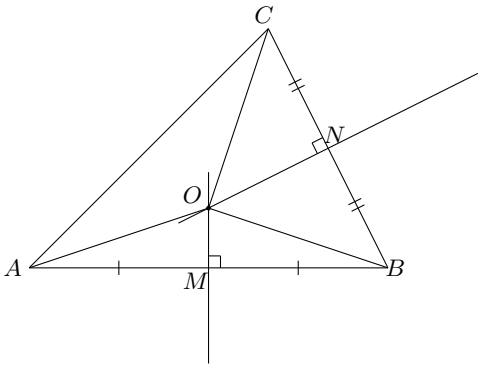
が成り立つ。これは $2(x + y) = 180^\circ$ となるので、$x + y = 90^\circ$、すなわち角 C が直角であることが示された。

円の直径を斜辺とする直角三角形を作ることは、与えられた円に内接する直角三角形を描くことである。逆に直角三角形が与えられたとき、直角三角形の頂点を通る円は必ず描ける。その方法は証明からも分かるように、斜辺の中点を中心とし、半径が斜辺の半分の長さの円を描けばよいのである。

外接円

実は、円と相性が良いのは直角三角形に限らず、一般の三角形とも相性が良いのである。相性が良いというのは、任意の三角形に対して、三角形の頂点を通る円が必ず描けるという意味である。一般に四角形以上の図形では、すべての頂点を通る円が必ず描けるとは限らない。多角形のすべての頂点を通る円を、その多角形の**外接円**と呼ぶが、それでは三角形の外接円はどのようにして描け

るのだろうか。結論を言えば、各辺の**垂直二等分線**が交わる点 O が外接円の中心となる。このことは、点 O が 3 つの頂点から等しい距離にあると言っているのである。そのことを示してみよう。



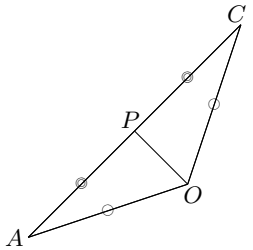
はじめに $\triangle AOM$ と $\triangle BOM$ に注目する。M は辺 AB を 2 等分している点だから $AM = BM$ である。また、辺 OM はどちらの三角形にも共通して使われているので $OM = OM$ と書いておこう。すると 2 つの三角形は、対応する 2 辺が同じ長さで、その間の角も直角で等しいので $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$ であるといえる。合同な図形は対応する辺の長さが等しいので、$AO = BO$ である。

続いて $\triangle BOM$ と $\triangle COM$ に注目する。ここでも、いまと同様な議論で $BO = CO$ と結論できる。以上の事実から

$$AO = BO = CO$$

であることが分かった。

これで、任意の三角形において外接円の中心を求めるには、辺の垂直二等分線を引けばよいことが分かったのだが、これだけでは 3 辺すべての垂直二等分線が一カ所で交わるかどうか分からないのである。しかし、それは次のようにすると分かる。



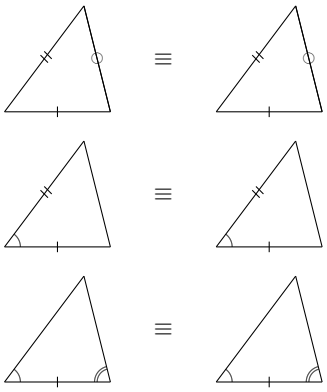
O と辺 AC の中点 P を結ぶ。ただし、この時点では OP と AC が垂直に交わっているかどうかは分からない。しかし、$\triangle AOP$ と $\triangle COP$ は対応する 3 辺がすべて等しいので、$\triangle AOP$ と $\triangle COP$ は**合同**な三角形である。合同な図形は対応する辺の長さと角の大きさが等しいので、$\angle APO = \angle CPO$

となる。このことは $\angle APO = \angle CPO = 90^\circ$ であることを意味する。すなわち、OP は AC の垂直二等分線になっているのである。

もっとも、3 辺の垂直二等分線が一点で交わることは、任意の 2 辺の垂直二等分線の交点が 3 つの頂点から等距離にある事実から分かることである。任意の 2 辺の垂直二等分線の交点は、2 辺の選び方によって 3 箇所にできる可能性がある。しかしそれら交点はどれも、3 つの頂点から等距離にあるのだから、そのような点は 1 つしか取れない。すなわち、3 辺の垂直二等分線の交点は一点で交わると言えるのである。

*　*　*

合同について触れておこう。2 つの図形が合同であるとは、対応するすべての辺の長さ、角の大きさが等しいことである。“対応する” ということが鍵である。簡単に言えば、一方の図形を移動や反転させるなどして、他方の図形にぴったり重ねることができれば合同となる。とくに 2 つの三角形が合同かどうかを調べる場合は、3 つの辺と 3 つの角すべてがそれぞれ等しいことを示す必要がないことが知られている。



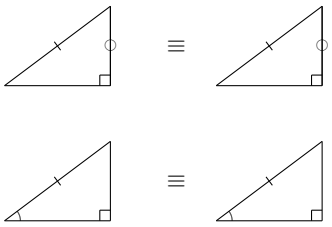
3 辺の長さがそれぞれ等しい

2 辺の長さとその間の角がそれぞれ等しい

1 辺の長さとその両端の角がそれぞれ等しい

上述の 3 つのパターンのどれか 1 つが当てはまれば、2 つの三角形は合同である。このことは三角形では、たとえば 3 辺の長さが分かればそれだけでただ 1 つの三角形が決定することを意味している。

また、三角形が直角三角形であることが分かっている場合には、上記以外にも合同となる条件がある。



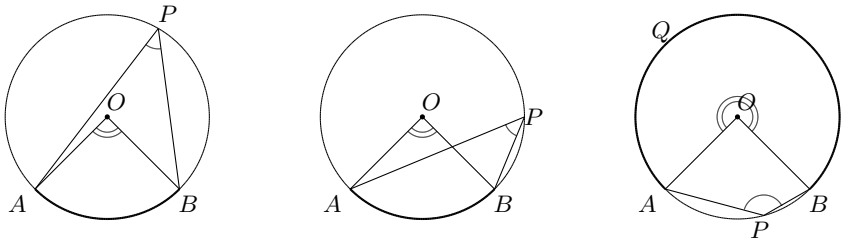
斜辺と他の 1 辺の長さがそれぞれ等しい

斜辺と他の 1 つの角がそれぞれ等しい

なぜこれで合同である—つまりただ 1 つの三角形が決定する—かは、斜辺が外接円の直径にあたることを思い出せばよい。斜辺の長さが分かることは、外接円の大きさが決定していることに他ならない。すると、直角三角形の形を決めるための要素は、1 つの辺か 1 つの角であることが分かる。なぜなら、1 つの辺を決めれば残りの辺は自動的に決定するからである。角についても同じことがいえる。▮

中心角と円周角

直角三角形と円との関連からは少し外れるが、この後に必要なことでもあるので、中心角と円周角について触れておく。



まず**弧** AB に対する**中心角**とは、弧の両端を中心と結んでできる、弧 AB の側の角度である。一般に、円周上に 2 点 A、B をとって弧 AB といった場合、2 つの弧のどちらを指しているのか分かりづらい。それを明確にするために、指している弧を目立たせたり、指している弧の途中に点 Q などを指定して弧 AQB などと書く。さて**円周角**であるが、弧 AB に対する円周角とは、弧の両端を弧 AB 上にない円周上の点と結んでできる、弧 AB の側の角度である。そして、中心角と円周角の間には

$$\boxed{\text{円周角の大きさは中心角の大きさの } \frac{1}{2}}$$

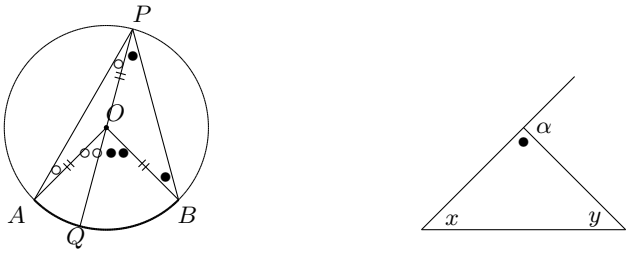
という関係が成り立っている。

そして、このことが正しければ直ちに

$$\boxed{\text{同じ弧に対する円周角の大きさは皆等しい}}$$

ことも分かる。なぜなら、弧 AB に対する円周角は上の左 2 つの図からも分かるように、弧 AB の反対側の任意の位置にとれる。中心角の大きさが必ず円周角の大きさの $\frac{1}{2}$ であるならば、円周角はどこにあっても同じ大きさになるからである。

それでは、円周角の大きさが中心角の大きさの $\frac{1}{2}$ であることを、円周角が左の図のような位置にある場合だけ証明しておこう。



証明といっても

三角形の 1 つの外角は、その隣にない 2 つの内角の和に等しい

という事実さえ分かっていれば、円周角が中心角の $\dfrac{1}{2}$ であることは一目瞭然である。三角形の 1 つの外角— α とする—に関する事実は、三角形の内角の和が 180° であることと、平角が 180° であることから

$$x + y + \bullet = 180^\circ, \qquad \alpha + \bullet = 180^\circ$$

が成り立つ。2 式を見比べれば $x + y = \alpha$ であることはすぐ分かる。