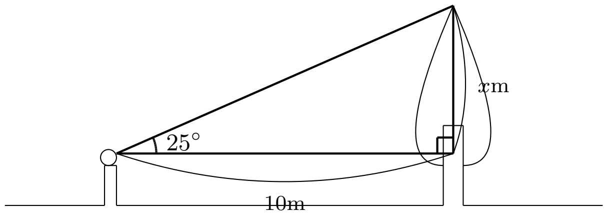
三角比の利用

三角比は、与えられた角度に対する辺の比が分かるものであるから、角度が測定できるなら、測量上たいへん役立つものである。



たとえば、木の根元から 10m の位置に立って、木の先端を見上げたときの角度が 25° であったとしよう。すると、これだけの情報と三角比を使えば木の高さが分かる。正確には、目線より上の木の高さ xm が分かるのであるが、角の大きさと辺の長さが図の位置関係にあれば、三角比のうち正接—すなわち $\tan\theta$ —が利用でき、

$$\tan 25^\circ = \frac{x}{10}$$

の関係にあることが分かる。三角比の表を見れば $\tan 25^\circ = 0.4663$ であるから、

$$0.4663 = \frac{x}{10}$$

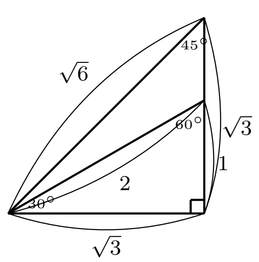
を解いて $x = 4.663$ となる。実際の木の高さは、これに目線の高さ—かりに 1.6m としよう—を加えて $4.663 + 1.6 = 6.263$ より、およそ 6.3m を求めることができる。

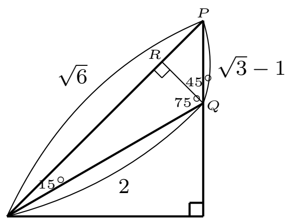
このような計算はもちろん概算であるものの、測量するのは直角三角形の 1 つの辺の長さと 1 つの角の大きさだけでよい。万能とは言わないが、三角比とは非常に利用価値が高いものである。

基本角以外の三角比 A

さて、三角比が実用的に使える道具であることは見た通りだが、いまのところ三角比の値を正確に知ることができる角度は 30°、45°、60° だけであった。比較的切りのよい 25° ですら、三角比の表に頼らざるを得ないのは現時点では仕方ないことであるが、他に数学的に三角比の値を調べられる角度はないものだろうか。

多少の工夫をすることで、基本の角度以外の三角比を求めてみよう。そのために、30°-60°-90° の直角三角形と、それに重なる 45°-45°-90° の直角三角形を利用する。



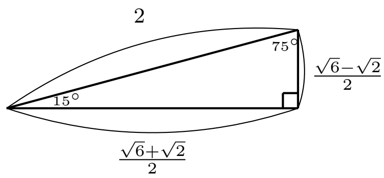


30°-60°-90° の直角三角形に 45°-45°-90° の直角三角形を重ねるわけだから、45°-45°-90° の直角三角形の辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ でなく $\sqrt{3}:\sqrt{3}:\sqrt{6}$ と見ると都合がよい。ここで、60° の頂点から $\sqrt{6}$ の斜辺に向けて垂線を下ろすと、上隅に 45°-45°-90° の直角三角形 PQR ができる。このとき、その隣の直角三角形が 15°-75°-90° の直角三角形になることは、ちょっと角度の計算をすれば分かることである。

さて、$\triangle PQR$ は斜辺の長さが $\sqrt{3}-1$ である。辺 QR と辺 PR は斜辺の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$QR = PR = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

であることが分かる。これで $\triangle PQR$ の隣にできる 15°-75°-90° の直角三角形の 3 辺の比が



のようにすべて明らかとなるのである。底辺が $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ であるのは、$\sqrt{6}-PR = \sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ を計算したものであることは分かるであろう。以上で、15° と 75° に対する三角比が求められる。すなわち

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \tan 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \end{aligned}}$$

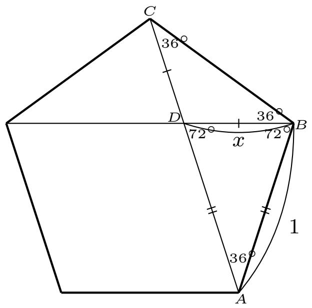
である。tan については分母を有理化して、

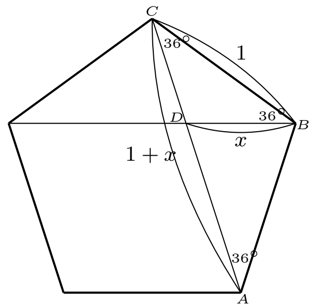
$$\tan 15^\circ = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

とすれば、すっきりした表記になるだろう。同様に $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$ である。

基本角以外の三角比 B

正 5 角形を利用すると新たな三角比の値を計算することができる。そのために正 5 角形の 2 本の対角線を使うことにする。すると、正 5 角形の内部にいくつかの三角形ができるので、それらの辺の長さに注目しよう。正 5 角形の 1 辺の長さは 1 とする。





まず、正 5 角形の内角の和は $540°$ であるから、1 つの内角は $540° \div 5 = 108°$ となる。また、$\triangle ABC$ は正 5 角形の 2 辺を共有しているので二等辺三角形である。さらに、$\triangle BCD$ も正 5 角形内部に張られた左右対称の対角線を共有しているので二等辺三角形である。これらのことを糸口に角度を計算すると、$\angle BAC = \angle BCA = 36°$ が分かり、最終的に $\triangle ABD$ は底角 $72°$ の二等辺三角形であることが分かる。ゆえに $AD = AB$ となって、$AD = 1$ である。

続いて BD の長さを知りたい。$BD = x$ とおいて、$\triangle ABC$ と $\triangle CDB$ が相似であることから

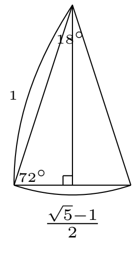
$$1 : (1 + x) = x : 1$$

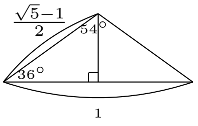
が成り立つ。これは 2 方程式 $x(x + 1) = 1$ であるから、解の公式を用いて x を求めると

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

となる。もう 1 つの解である $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$ は 1 より大きいので適切ではない。

さて、いま x の値が求められたことで、角の大きさと辺の長さが確定した三角形が 2 種類、目の前に現れることとなった。垂線を下ろせば直角三角形ができるので、図から三角比の値を求めることができる。





たとえば左図からは、

$$\boxed{\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

がすぐに分かる。また右図からは、

$$\cos 36^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$$

を有理化して

$$\boxed{\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

となるのである。

* * *

いま、正 5 角形の 1 つの内角の大きさを $540^\circ \div 5 = 108^\circ$ と求めたが、一般に n 角形は $(n-2)$ 個の三角形に分割できるので、内角の和は

$$\boxed{(n-2) \times 180^\circ}$$

で求めることができる。したがって、5 角形ならば $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$ である。

しかし n 角形の 1 つの内角は、実は

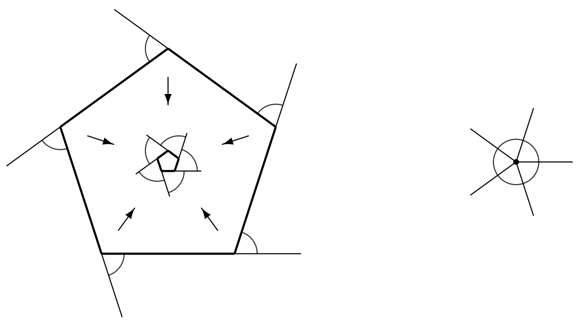
$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

で求めることもできる。5 角形ならば

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

である。なぜそうなのかといえば、n 角形の外角の和は常に 360° だからである。このことから、正 n 角形は 1 つの外角の大きさが分かれば、180° から引いて内角の大きさが計算できるのである。

では、n 角形の外角の和が常に 360° であることはどのようにして分かるのだろうか。図は正 5 角形を描いているが、任意の n 角形でも同じことである。



外角を図示した正 5 角形を、その中心に向けて縮小した図を考えよう。縮小してもそれぞれの外角の大きさが変わるわけではない。縮小を極限まで縮めたとしたら、それぞれの外角は一点の周りに隙間なく描かれるはずである。もちろん外角の和は、一点の周り 360° をぴったり覆っている。このことから一般の n 角形についても、外角の和が 360° であることは一目瞭然である。▮