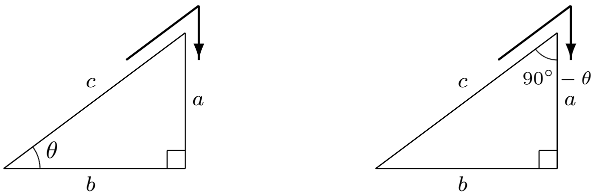
余角の関係

三角比の表を作って眺めれば気がつくことであるが、$\sin\theta$ の列と $\cos\theta$ の列には互いに同じ数値が現れているはずである。もっとはっきり述べれば、$\sin\theta$ の列を $1°, 2°, 3°, \ldots$ と追ったときに見える値と、$\cos\theta$ の列を $89°, 88°, 87°, \ldots$ と追ったときに見える値が同じになっているはずである。このことは三角比の表を見るまでもなく、三角比の定義からも分かることである。



ある直角三角形に対して $\sin\theta = \dfrac{a}{c}$ であれば、比 $\dfrac{a}{c}$ は同じ直角三角形の $\cos(90° - \theta)$ でもある。このことから

$$\boxed{\cos(90° - \theta) = \sin\theta}$$

が成り立つことが分かる。この式で $90° - \theta = \vartheta$ と置くと、$\theta = 90° - \vartheta$ であるから、

$$\sin(90° - \vartheta) = \cos\vartheta$$

である[1]。ここで改めて ϑ を θ に書き換えれば

$$\boxed{\sin(90° - \theta) = \cos\theta}$$

が成り立つ。もっともこの関係は、比 $\dfrac{b}{c}$ を θ と $90° - \theta$ に対して見ても分かることである。

$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ に対して、比 $\dfrac{a}{b}$ を他の三角比で表すわけにはいかない。しかし $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ は常に成り立つので、θ を $90° - \theta$ に置き換えた

$$\tan(90° - \theta) = \frac{\sin(90° - \theta)}{\cos(90° - \theta)}$$

は正しい。ここに上で得た 2 つの関係を右辺に当てはめれば

$$\tan(90° - \theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

と同じことである。$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ は $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ の逆比、すなわち $\tan\theta$ の逆比だから、結局

[1] ϑ は θ の異字体。

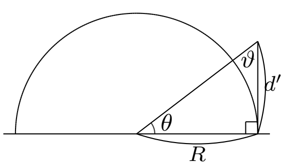
$$\boxed{\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}}$$

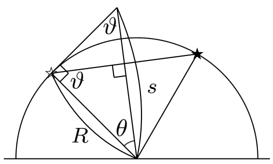
が成り立つことが分かる。もちろんこの関係は、比 $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ と $\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{b}{a}$ を見比べても分かることである。

* * *

sin（サイン）、cos（コサイン）の呼び方は、*sine*、*co-sine* からきているのだが、接頭辞 “*co-*” が意味するひとつに “相互に” がある。正弦の比 $\dfrac{a}{c}$ が余弦でも現れることから、*co-sine* と呼ばれているのだろう。いま見たように、比 $\dfrac{a}{b}$ と比 $\dfrac{b}{a}$ は互いに逆数の関係であるから、$\tan\theta$ と $\dfrac{1}{\tan\theta}$ は相互に関連し合っている。簡単のため $\dfrac{1}{\tan\theta}$ を $\cot\theta$ と表すことがある。cot は**コタンジェント**（*co-tangent*）からきているのだが、*co-sine* が *sine* と相互関連があるために “*co-*” をつけたのと同様、*co-tangent* は *tangent* と相互関連があるから “*co-*” をつけるのだろう。

tan に逆比があるように、sin、cos でも逆比を考えることができる。$\sin\theta$ の逆比 $\dfrac{1}{\sin\theta}$ は $\mathrm{cosec}\,\theta$、$\cos\theta$ の逆比 $\dfrac{1}{\cos\theta}$ は $\sec\theta$ と表される[2]。tan と cot の関係から連想すれば、sin と sin の逆比こそ、*sine* と *co-sine* で呼ばれてもよさそうなものなのに、なぜかそうでない点が不思議なところである。





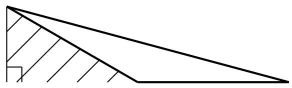
以前 tan、sin、cos をそれぞれ、正接、正弦、余弦と呼ぶ理由を、☆と★を結ぶ弦の長さに由来する旨を述べた。cot、cosec、sec はそれぞれ、余接（よせつ）、余割（よかつ）、正割（せいかつ）と呼ぶ。cot が余割と呼ばれるのは余角 ϑ に対する正接にあたるので自然な呼び方であろう。

右図で、弦を分かつ線分 s は割線（かっせん）—円周を分割する直線—の一部である。正角 θ に対する半弦の比が正弦と呼ばれるように、正角 θ に対する割線の比 $\dfrac{s}{R}$ は正割と呼ばれるにふさわしく、これはちょうど余弦の逆比になっているのである。すると余割は余角 ϑ に対する正割にあたるのは明らかである。▌

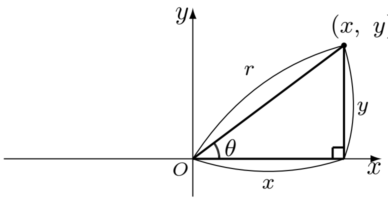
三角比の拡張

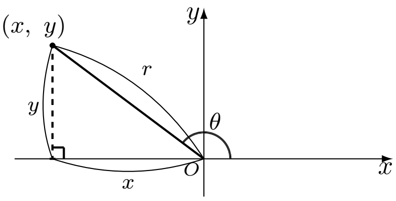
三角比を考える場合、三角形の角の 1 つが 90° であることから、残る 2 つの角の大きさは合計 90° である。すなわち、それぞれの角は 0° から 90° の範囲に限られることになる。このことから三角比に関しては 90° 以上の角を扱うことは意味がないように思える。ところが鈍角三角形の存在が示すように、三角形の内角の 1 つが 90° を超えることがある。それでは直角三角形にならないだろうと思うのが自然な考えであるが、適当な垂線を下ろせば直角三角形が現れるのである。

[2]cosec はコセカント（*co-secant*）、sec はセカント（*secant*）と読む。cosec は csc と書くこともある。



このように直接、直角三角形を見ることができなくても、間接的に直角三角形を作れるなら、その範囲まで考えを広げておくのが望ましい。後になれば分かることだが、一般の三角形を調べる場合、鈍角の三角比が使えるとよいのである。





そこで、直角三角形を座標平面に置いてみる。すると、正角 θ は x 軸と斜辺が作る角に、隣辺の長さ x と対辺の長さ y は斜辺先端の x 座標と y 座標に置き換えることができる。すると三角比は斜辺の長さを r として

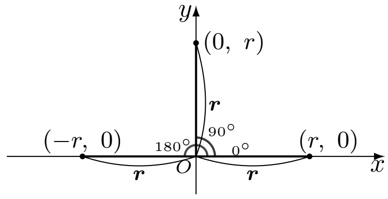
$$\boxed{\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

のように再定義できるのである。

このようにしておくと、たとえ正角と x 軸が作る角が 90° を超えても、斜辺であった線分の先端の x 座標と y 座標を特定することができるので、三角比が定義できるのである。

0°、90°、180° の三角比

三角比を拡張したことで、本来ならあり得ない三角比を求めることができる。たとえば $\theta = 0^\circ$ をもつ直角三角形といっても三角形ができるはずもなく、したがって三角比も求められないと考えるのが自然である。ところが実際、0°、90°、180° の角度を長さ $\boldsymbol{r}$ の径で描いてみると、どの場合でも x 座標と y 座標を特定することができる（径の長さ $\boldsymbol{r}$ と座標の値 r を区別して書いたことに注意）。



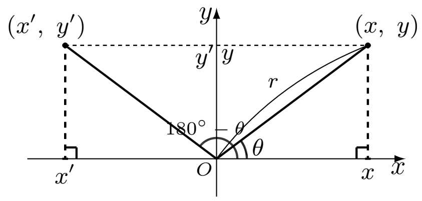
このことから

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{\boldsymbol{r}} = 0, \qquad \cos 0^\circ = \frac{r}{\boldsymbol{r}} = 1, \qquad \tan 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$$
$$\sin 90^\circ = \frac{r}{\boldsymbol{r}} = 1, \qquad \cos 90^\circ = \frac{0}{\boldsymbol{r}} = 0, \qquad \tan 90^\circ = \frac{r}{0} = (\text{値なし})$$
$$\sin 180^\circ = \frac{0}{\boldsymbol{r}} = 0, \qquad \cos 180^\circ = \frac{-r}{\boldsymbol{r}} = -1, \qquad \tan 180^\circ = \frac{0}{-r} = 0$$

と計算できるのである。

補角の関係

90° を超える角に対する三角比が定義できたものの、実際の直角三角形には 90° を超える角はないので、そのようなときは**補角**を考えるのがよいだろう。補角というのは平角— 180° のこと—に対する残りの角のことで、具体的には 30° の補角は 150°、100° の補角は 80° のように言う。



さて、90° より小さい角 θ を考えると補角 $(180^\circ - \theta)$ は 90° より大きい。θ と $(180^\circ - \theta)$ は y 軸に対して対称の位置にあるから、斜辺であった線分の先端座標をそれぞれ $(x,\ y)$、$(x',\ y')$ とすると

$$y' = y, \qquad x' = -x \quad (※)$$

という関係がある。ところで拡張された三角比の定義から

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \sin(180^\circ - \theta) = \frac{y'}{r}$$

であるから、このことと（※）より $\sin(180^\circ - \theta) = \dfrac{y'}{r} = \dfrac{y}{r} = \sin\theta$、すなわち

$$\boxed{\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta}$$

が成り立つ。また、

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \cos(180^\circ - \theta) = \frac{x'}{r}$$

であるから、このことと（※）より $\cos(180^\circ - \theta) = \dfrac{x'}{r} = -\dfrac{x}{r} = -\cos\theta$、すなわち

$$\boxed{\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta}$$

が成り立つ。さらに $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ の関係から、$\tan(180^\circ - \theta) = \dfrac{\sin(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)} = \dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta}$ が言えて、

$$\boxed{\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta}$$

であることも分かるのである。

このような補角の関係が分かると、すでに知っている 30°、45°、60° に対する三角比から、150°、135°、120° に対する三角比が分かる。以上のことから基本的な角に対する三角比の値がすべて明らかになった。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	(値なし)	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

表は基本の三角比の一覧である。たしかに互いに補角の関係にある 2 つの角は、絶対値が等しい値であることが分かる。

*　*　*

たったいま明らかとなった基本的な角に対する三角比を、とくに sin と cos について近似値で表してみよう。近似値の計算には $\sqrt{2} = 1.414$、$\sqrt{3} = 1.732$ を用いた。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	0.5	0.707	0.866	1	0.866	0.707	0.5	0
$\cos\theta$	1	0.866	0.707	0.5	0	-0.5	-0.707	-0.866	-1

表をながめると、角度が 0° から 180° へ推移するに従い、sin と cos の値の変化の特徴が見えてくるのである。詳しくは三角関数を扱うときに説明するが、このような変化が見られるのも、三角比を拡張したおかげなのである。▌