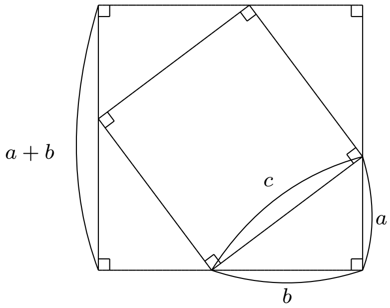
三平方の定理

直角三角形の 2 辺の比に注目するだけでなく、3 辺の長さにも注目してみよう。そこで、4 つの**合同な**直角三角形をうまく配置して、図のような正方形を作った場合を考える。



このように形作ってみると、一辺の長さが $a+b$ である正方形の内側に、一辺の長さが c である正方形が斜めに収まっていることになる。図形の総面積は、外側に形作られている正方形の一辺から $(a+b)^2$ であることが分かる。一方で、図形は 4 つの直角三角形と中央の正方形で組み立てられているので、総面積は $4\times\dfrac{1}{2}ab+c^2$ である。どちらも同じ値であるから

$$(a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2$$

がいえる。左辺を展開して

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$

より、

$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$

という関係式が導かれた。これは、どんな直角三角形にも成り立つ式で、**三平方の定理**または**ピタゴラスの定理**と呼ばれる[1]。ピタゴラスの名が冠されてはいるが、定理の発見に至る経緯は諸説あり、実際のところは分からないようだ。

三角比の相互関係

何のために三角比などを定義するのだろうか。それは、変らないものを抽出したいからである。合同な三角形であれば、角の大きさ、辺の長さ、面積など、あらゆるものが変らない。しかし、相似な三角形となるとそうはいかない。角の大きさは変らないが、辺の長さや面積などは変ってしま

[1] ピタゴラスまたはピュタゴラス（582B.C.–496B.C.）：古代ギリシアの数学者、哲学者。

うのが普通である。それでも辺の比に目を向けると、そこに変らないものが見えてくる。相似な図形は、角度の他に辺の比も変わらないことが大事な要素なのである。

もう一度、三角比の定義を見てみよう。分数というものはどことなく落ち着かないものであるから、分母を払ってみよう。すると sin と cos については

$$\boxed{a = c\sin\theta, \quad b = c\cos\theta \qquad (※)}$$

のような式が得られるが、$\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ であることから（※）を代入して

$$\tan\theta = \frac{c\sin\theta}{c\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

であることが分かる。sin と cos と tan は互いに関連し合っているのである。

また、直角三角形には三平方の定理 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ。ここに、（※）を代入して整理すると

$$\begin{aligned}(c\sin\theta)^2 + (c\cos\theta)^2 &= c^2\\ c^2\{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2\} &= c^2\\ (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 &= 1\end{aligned}$$

となる。sin と cos には非常に強い関連が見て取れる。今後、三角比を 2 乗したり 3 乗したりすることがあるが、( ) を書く煩わしさを減らすためにも $(\sin\theta)^2$ などは $\sin^2\theta$ と書くことにする。これらは重要な関係なので、改めて書き留めておこう。

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

いま得たばかりの 2 つの関係式において、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ってみると、

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

になって、もう 1 つの関係式 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ に注意すると、この式は

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}}$$

となる。tan と cos の関係式として記憶に留めておくとよいだろう。

*　　*　　*

数学では ( ) の使い方には気をつけなくてはならない。$(\sin\theta)^2$ を簡単のため $\sin\theta^2$ と書いてしまうと、指数は直近の値をべき乗する決まりなので、本来

(角θに対する正弦の値) の 2 乗を求めること

であるはずのものが

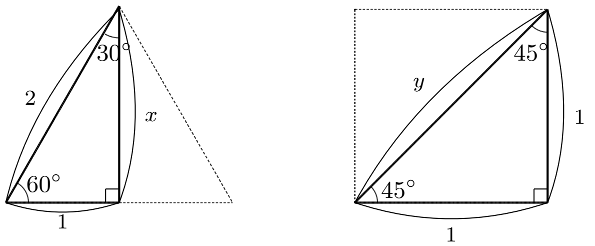
(角θを 2 乗した値) に対する正弦を求めること

になってしまう。本来の値が求められないばかりか、$\theta = 30$ 度とすると $\theta^2 = 900$ 度^2 というように、度が 2 乗された単位になり、これでは何のことか分からなくなる。そのために $\sin^2$ と書くのである。

ところで、θ^2 が何のことか分からなくなるのは、角度の単位に度を用いるからであって、角度を 2 乗する意味がないわけではない。いずれ角度の再考をするが、単位 “度” は数学で扱うにはあまりよいものではないのである。▮

基本角の直角三角形

三角比は直角三角形に対して定義されたので、まず特徴的な直角三角形から見ることにしよう。



直角三角形を作るには、正三角形や正方形を半分にするとよい。図では、左の正三角形の一辺の長さが 2 で、右の正方形の一辺の長さが 1 であるにも関わらず、不統一な大きさで描かれて見えるかもしれない。たしかに絶対的な辺の長さと見ればおかしなことだが、ここでは正三角形における辺の比であり、正方形における辺の比であると解釈しておこう。辺の比で考える方が好都合なのである。

それぞれの直角三角形において、残りの辺の長さを求めてみよう。まず、正三角形を半分にしたものを計算しよう。残りの辺を x とすると、三平方の定理から

$$1^2 + x^2 = 2^2$$

が成り立つ。これは $x^2 = 3$ から $x = \sqrt{3}$ と解ける。正方形を半分にしたものの残りの辺は y とする。三平方の定理から

$$1^2 + 1^2 = y^2$$

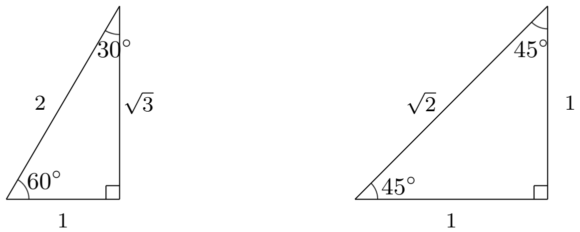
が成り立つ。これは $y^2 = 2$ から $y = \sqrt{2}$ と解ける。

ここでは、一辺の長さが 2 の正三角形から得られる直角三角形の辺の長さが、それぞれ 1、2、$\sqrt{3}$ になることを示しただけではない。どのような長さの正三角形であっても、そこから得られる

30°-60°-90° の直角三角形は、辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ であることを示したことになっている。同様に、45°-45°-90° の直角三角形は、辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ である。この 2 つの直角三角形は、3 つの角の大きさと 3 つの辺の長さの比がすべて既知であるという点で基本の直角三角形と言えるだろう。

基本の三角比

では、基本の直角三角形について三角比を求めてみよう。

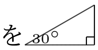


60° の角をもつ直角三角形については、斜辺 : 対辺 : 隣辺 $= 2:\sqrt{3}:1$ であるから、三角比の定義より

$$\boxed{\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}}$$

である。同様に

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1 \end{array}}$$

であることも分かる。30° に対する 3 つの三角比の値は、三角形を 

に置き直すと求めやすいだろう。

*　　*　　*

いくつかの三角比が分母の有理化をせずに書かかれていることに気を留めただろうか。分数はたしかに約分しておく方が見やすいのであるが、三角比については必ずしもそうではない。上記の三角比を近似値で用いることが少ないことや、むしろ “定数” の扱いにしておきたいことが理由である。また、比を表すときは一方が 1 である方が大きさの比較がしやすいこともある。しかし、これらの三角比は確実に覚えておきたいものであるから、分母を有理化した数値が覚えやすければそうするとよい。また、三角関数を考える時期がくれば、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ が便利なこともあるので、心に留めておいてほしいものである。▮

さて、ここで 30°、45°、60° に対する三角比が求められたわけだが、それ以外の角に対する三角比がどうなっているかを考えることは自然なことである。たとえば $\sin 20^\circ$ の値を知りたいことが

あるかもしれない。そうすると、直角以外の角が 20° と 70° の直角三角形の辺の比が分からなくてはならない。しかし、このような一般の直角三角形について、辺の比を求めるのは容易なことではないのである。

数学の教科書などには三角比の値が一覧になっていて、たとえば

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

のような表を見ることができる。この表はどのようにして作成されているのだろうか。実は、直角三角形の辺の比から計算されたのではない。この段階での数学の知識では説明できないのであるが、角 θ を与えると $\sin\theta$ の値を返す関数 $y=f(\theta)$ がいくつか存在している。この場合、$f(45^\circ)=0.7071\cdots$ となるのだが、次に挙げる関数 f と g は、組み合わせて sin の近似値を返す関数で、具体的に $\sin 45^\circ$ の近似値を求める例を示している。

$$
\begin{aligned}
g(45^\circ) &= 45\times\frac{3.141592}{180}\ , \\
f(45^\circ) &= g(45^\circ)-\frac{\{g(45^\circ)\}^3}{6}+\frac{\{g(45^\circ)\}^5}{120}\ .
\end{aligned}
$$

実際に計算してみると、$g(45^\circ)=0.785398$ になるので

$$
f(45^\circ)=0.785398-\frac{0.785398^3}{6}+\frac{0.785398^5}{120}=0.7071429
$$

と計算される。真値は $\sin 45^\circ=0.7071067\cdots$ であるから、なかなかよい近似であろう。これで sin の近似値が得られる理由は、**テイラー級数**を学んで分かることである[2]。

表計算ソフトウェアの Microsoft Excel には、三角比の値を求める関数 `SIN()` や `COS()` などがあらかじめ組み込まれているので、これで三角比の表を作成するのもよいだろう。

◇	A	B	C	D	E	F
1	θ	sin θ	cos θ	tan θ		
2	1	(※ **B2**)	(※ **C2**)	(※ **D2**)		
3	2	↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする		
4	3	↓	↓	↓		
5	4	↓	↓	↓		
6	5	↓	↓	↓		

※ セルの式
（**A2**）　**=SIN(RADIANS(A2))**
（**B2**）　**=COS(RADIANS(A2))**
（**B2**）　**=TAN(RADIANS(A2))**

[2] ブルック・テイラー (1685–11731)：イギリスの数学者。

先の関数 $f(\theta)$ の計算式では、$\sin 45^\circ$ の値を計算するのに、一旦 $g(45^\circ)$ のように別の関数に計算を任せてから $f(45^\circ)$ を求めていること、Excel の例に見られる B 列や C 列の関数式でも、$\sin 1^\circ$ の値を計算するのに、直接 `=SIN(A2)` とせず `=SIN(RADIANS(A2))` のように余計に見える関数 `RADIANS()` が使われていること、などに気づいただろうか。なぜそうするのかは、三角比が三角関数に拡張されたときに理解できるだろう。