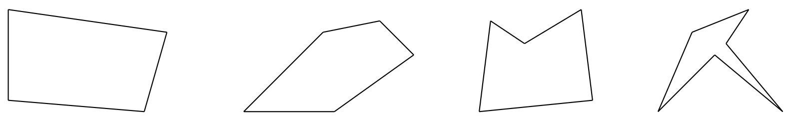
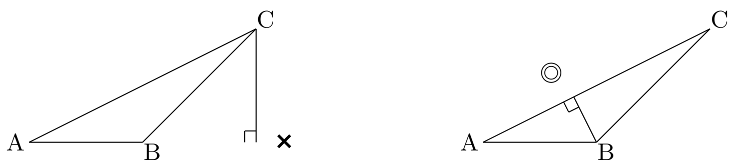
直角三角形

図形を系統的に調べようと考えた場合どこから手をつけたらよいだろうか。図形には直線だけで囲まれたもの、曲線を含むもの、さらには点だけで描かれたものなど様々である。これらの図形を系統立てて調べたり、一定の特徴にそって分類する作業は、ゴミの山を整然と分別するようなものかもしれない。すべてを一度に済まそうとしても収拾がつかないから、手始めに直線だけで囲まれた図形を考えることにしよう。



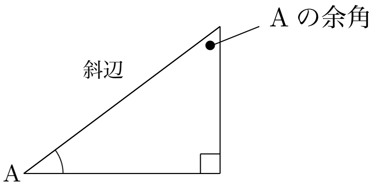
直線だけで囲まれているといっても図形の形は千差万別であるから、図を見ているだけでは何をどう調べたらよいか分からないであろう。しかし直線だけで囲まれた図形は、頂点と頂点を適切に結ぶと、必ずいくつかの三角形に分割できる。実際、上に挙げた図形はどれも三角形に分割できる。このことから、図形の基本は三角形であると言ってよいだろう。

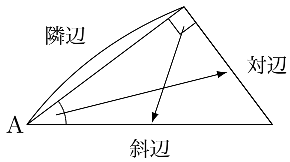


しかも三角形は、頂点から向かいの辺に垂線が下ろせるなら、2 つの直角三角形に分割できる。“向かいの辺に垂線が下ろせるなら” と書いたのは、三角形によってはそうできない頂点があるからだが、適切な頂点を選びさえすれば必ず直角三角形に分割できる。このことから、三角形の基本は直角三角形であると言ってよいことになる。

そのようなわけで、図形のことを調べるなら直角三角形に絞って考えるのが効率的であるように思える。ところで、直角三角形には直角があると言った場合、それがどのようなものであるかの共通認識を私たちはもっている。そうすると、直角以外の角や辺に対しても共通の認識をもてれば便利であろう。

ふつう図形の角や辺の名称は、頂点につけた記号 A, B, C などを用いて角 B であるとか、辺 AC などと表現している。しかし、共通の認識を得るために必要な記号は、直角以外のただ 1 つの頂点で充分なのである。なぜなら、直角は 1 つしかないし、直角でない頂点の 1 つにたとえば記号 A を与えれば、残りの角に記号を与える必要はなく **A の余角**と呼べばよいからだ。





では、頂点の名称が A しかないときに、それぞれの辺を適切に表現するにはどうすればよいだろう。その場合、辺の名称は角 A に対する位置で呼ぶとよい。まず、直角の向かいの辺を**斜辺**と呼ぶ。斜辺は、斜めに描かれていなくても斜辺と呼ぶことに注意されたい。次に、角 A の向かいの辺を ***A* の対辺**と呼ぶ。これで 2 辺の呼び名が決まったので、残る辺は自明である。それを ***A* の隣辺**と呼ぶことにしよう。ただ、これでは隣辺は斜辺と対辺に従属しているような印象を受けるので、角 A と直角の間の辺が A の隣辺である、と言う方が積極的でよいかもしれない。

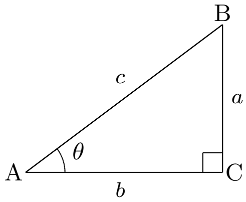
* * *

どのような流儀か分からないが、“角 A の大きさ A” のように、頂点名称は標準書体の ‘A’ で、角の大きさは斜体の ‘A’ で表すことがあるようだ。頂点と周りの角を同じ文字で表すことは自然なことであるし、また、頂点と角は別物だから違いを明確にする必要があるのは理解できる。ただし、この記法をあまり厳密に適用しても少々息苦しい。記法を厳密に使うのであれば、“$\angle A = 30^\circ$” と書くのはおかしいことになるからである。この場合、斜体の ‘A’ は角の大きさを表すので “$A = 30^\circ$” と書けば十分である。

では、標準書体を用いた “$\angle \mathrm{A} = 30^\circ$” ならよいかと言えば、やはり少し違和感が残る。このように書いてみると、それは “頂点 A の角が 30°” ということになって、頂点が角度を持つような印象を受ける。どうしても ∠ を使いたいなら、標準書体を用いて $\angle \mathrm{BAC} = 30^\circ$ のように書けばよいだろう。私はとくにこだわらずテキトーに書いているので、文脈から判断してもらいたい。▮

三角比の定義

さて、直角三角形の認識には 1 つの頂点に名称を与えるだけでよいと言うものの、数学の議論としては各頂点、各辺に名称がある方がよい。角 B とか辺 AC などと呼ぶ方が直接的で分かりやすいからだ。



角の大きさや辺の長さが具体的な数値で与えられていれば十分だが、そうでなければ角の大きさや辺の長さは文字で表さなくてはならない。この場合は、頂点と向かいの辺が対応していることか

ら、辺の長さは頂点の名称を小文字で表すのが習慣である。つまり、角 A の向かいの辺の長さは a である。また、角の大きさには θ が使われることが多い[1]。

ところで図は a や θ のような未知数で表されているので、それぞれの値を自由に決めれば—といっても $a=b=1$、$c=3$ では三角形にならないので完全な自由ではないが—無数の三角形ができてしまう。しかし、θ の値を 1 つに決めれば三角形の形が 1 つに決まる。形というのは、対応する 3 辺の比が相等しい三角形ということであり、**相似な**図形は同じものと見なしているからである。それは、たとえ a と b がどのような値であろうとも、$a:b$ の値は一定になることを言っている。このことは、1 つの θ の値に対して 1 つの $a:b$ の値が決まることなので、$a:b$ は θ の関数になっているのである。

直角三角形の中に関数を見いだすことができるのであれば、数式を用いて図形を考察できる。ただし、辺の比の取り方は何通りかあるので、ここで辺の比についてきちんとした定義を与えることにしよう。

まず、辺の比は

$$a:b, \quad (b:a), \quad a:c, \quad (c:a), \quad b:c, \quad (c:b)$$

の 6 種類が考えられる。このうち、( ) で示した比は単に逆比であるから、本質的に違いがあるのは $a:b$、$a:c$、$b:c$ の 3 つである。一般に $x:y=\dfrac{x}{y}$ であるから、直角三角形から得られる比は、直角三角形特有の名称を用いて

$$\frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}, \quad \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}, \quad \frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$$

ということになる。しかし 3 種類ある辺の比を、このまま扱うのは不便であるから、それぞれの比に呼び名を与えよう。ただし、対辺などの名称は角 A あってのものであることを思い出してほしい。つまりこれらの比は、角 A をもとに構成されているので、

$$A\text{の正接は}\frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}, \quad A\text{の正弦は}\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}, \quad A\text{の余弦は}\frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$$

と呼ぶことにし、記号を用いて

$$\tan A=\frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}, \quad \sin A=\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}, \quad \cos A=\frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}$$

と定義する[2]。記号の読み方は順に、“**タンジェント A**”、“**サイン A**”、“**コサイン A**” である。等式はどれも右辺が比の形なのに、左辺では何々比と呼ばないことに違和感があるかもしれない。そ

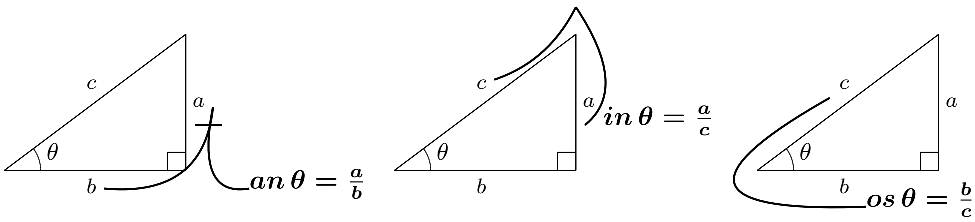
[1] θ はギリシア文字で “シータ” と読む。
[2] “正接”、“正弦”、“余弦” は “せいせつ”、“せいげん”、“よげん” と読む。

の場合は心の中で、正接なら正接比、タンジェント A なら A のタンジェント比、などと唱えるとよいだろう。

先ほどの図では頂角 A の大きさは θ であるから、A の代わりに θ を用いて $\tan A$ を $\tan\theta$ といっても同じことである。さらに、辺を名称でなく長さを表す文字で書けば、いかにも数学らしい関係式になる。$\angle A=\theta$、$\angle C=90^\circ$ に注意して、これを三角比の定義としよう。

$$\boxed{\tan\theta=\frac{a}{b},\quad \sin\theta=\frac{a}{c},\quad \cos\theta=\frac{b}{c}}$$

ところが人は、数式で書かれた定義をそうやすやすと記憶できるようにできていない。



しかし幸いにも日本語の分数の読み方は、分母から分子へ向かって読むので、直角三角形の直角が右下、θ の角が左下にくるように描くと、記号の筆記体による書き順と分数の読み順が一致するので覚えやすい。初めのうちは、直角三角形がどのように置かれても、常にこのような定位置に置き直して考えるとよいだろう。

*　*　*

$\tan\theta$、$\sin\theta$、$\cos\theta$ がそれぞれ正接、正弦、余弦と翻訳されるのはそれなりの理由があるようだ。

そもそも三角比は、天空に張り付いている星間距離の測量に使われたと言われている。

図で、☆と★の間の距離が知りたければ、その中間点までの半弦の長さ d を知れば十分である。しかし、天空間の距離は直接測ることはできない。そこで天空までの距離 R—これは観測者から地の果てまでの距離に等しく、地の果てまでの距離は当時の人たちは推測していたに違いない—と、半弦 d を臨む角 θ を使って d を求めることになる。

それは正角 θ に対する比 $d:R$ から求めることができる。すなわち、正角に対する半弦比であり、これが $\sin\theta=\dfrac{d}{R}$ であった。また、比 $d:R$ は見方を変えれば、余角 ϑ に対する半弦比でもあり、これが $\cos\vartheta=\dfrac{d}{R}$ であった。そして、天空を見上げる直角三角形と相似な三角形を地上に置くと、正角 θ に対する比 $d':R$ から接線の長さを求めることもできる。これは $\tan\theta=\dfrac{d'}{R}$ なのである。▮