三角関数方程式 I

方程式とは未知数を特定するものであるが、方程式を関数に置き換えれば、方程式を解くことと関数の**零点（れいてん）**を求めることは同じである。したがって、方程式

$$\cos 2\theta + 3\sin\theta + 1 = 0 \quad (※)$$

を解くことは $y = \cos 2\theta + 3\sin\theta + 1$ の零点を求めることでもある。

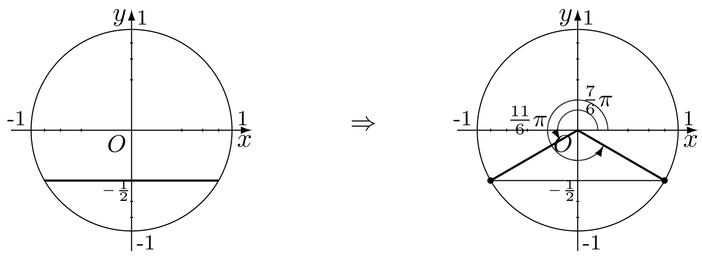
とは言うものの、三角関数方程式には一般の方程式にはない、特有の事情がある。まず簡単なところで、θ を未知数とする方程式

$$2\sin\theta + 1 = 0$$

を解いてみよう。移項して $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ になることに注意すると、方程式は

単位円上の y 座標が $-\dfrac{1}{2}$ であるときの、動径の位置を求めよ

と言っていることになる。



それは、図のように $y = -\dfrac{1}{2}$ を示す単位円上の位置が分かれば、そこが求める動径の位置である。したがって $\theta = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ が解であるが、単位円上の点は 2π の整数倍を加えても同じ位置にあることから、正しくは

$$\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \quad \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

と書くべきものである。

三角関数方程式 II

では、はじめの例であった（※）を解くことにしよう。三角関数には多くの関係式があったので、三角関数方程式を解くときは、それらを活用しなくてはならない。（※）は $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ を

使って

$$
\begin{aligned}
\cos 2\theta + 3\sin\theta + 1 &= 0 \\
1 - 2\sin^2\theta + 3\sin\theta + 1 &= 0 \quad (\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \text{より}) \\
2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \quad (\text{整理した}) \\
(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 2) &= 0 \quad (\text{因数分解した})
\end{aligned}
$$

とすれば、$2\sin\theta + 1 = 0$ および $\sin\theta - 2 = 0$ を求めればよいことになる。前者は既に解いた方程式であり、後者は $-1 \leqq \theta \leqq 1$ であることから、等式を満たす解はない。したがって、この方程式の解は

$$\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \quad \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

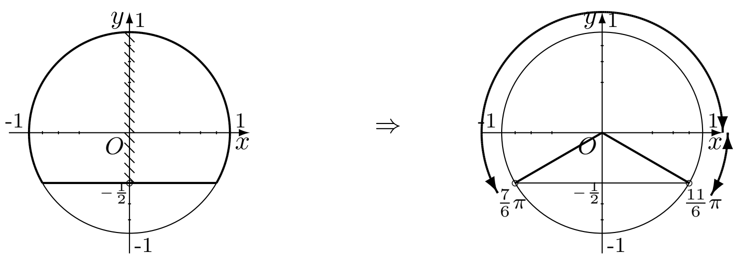
である。

三角関数不等式

最初の方程式を不等式に見立てよう。すると

$$2\sin\theta + 1 > 0$$

のような不等式を考えることができる。方程式では $\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ を求めているが、$=$ を $>$ に換えれば済むほど簡単な話ではない。



この不等式は $y > -\frac{1}{2}$ であるから、y 座標が $-\frac{1}{2}$ より大きい位置に動径があればよいことになる。それを満たす y 軸上の範囲は左図の斜線で示したところであるが、方程式で解いた値をそのまま使って $\frac{11}{6}\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi$ とするわけにはいかないだろう。$\frac{11}{6}\pi$ は $-\frac{\pi}{6}$ に見直して、$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{7}{6}\pi$ とするのが自然でよい。もちろん一般的に

$$-\frac{\pi}{6} + 2n\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi + 2n\pi \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

と書くのもよいだろう。しかし、角の基本を $0 \leqq \theta < 2\pi$ とするなら、解は 2 つに分かれてしまうが

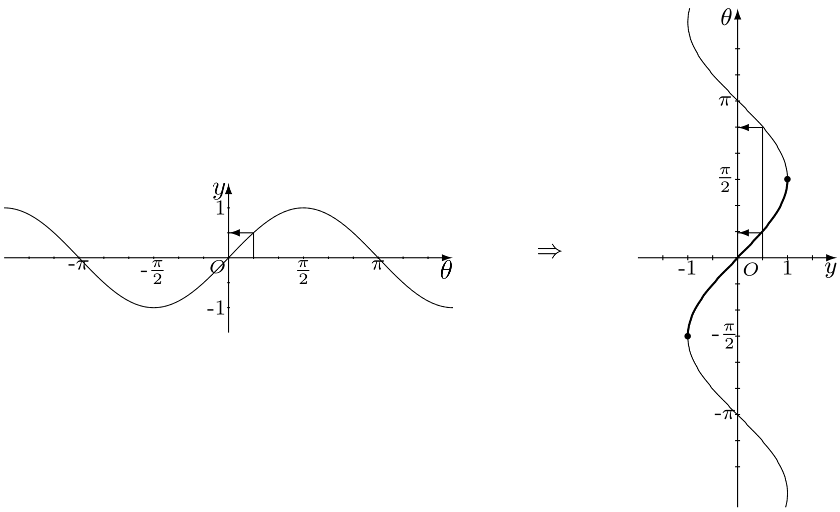
$$0 \leqq \theta < \frac{7}{6}\pi, \quad \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

とするべきかもしれない。

三角関数の主値

たとえば三角関数方程式 $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ を解くことは、関数 $y = \sin\theta$ において $-\frac{1}{2} = \sin\theta$ を満たす θ を求めることである。関数は y を決めて θ を求めるより、θ を決めて y を求める方が容易なので、$y = f(\theta)$ の逆関数 $\theta = g(y)$ を考えて、$y = -\frac{1}{2}$ を代入する方が簡単である。では、$y = \sin\theta$ の逆関数は何であろうか。

それは対数関数でも述べたことだが、θ と y の役割を交換したものが逆関数なので、グラフを描くだけなら θ 軸と y 軸の見方を変えればよい。



図は $y = \sin\theta$ とその逆関数 $y = \sin^{-1}\theta$ のグラフである。$^{-1}$ は指数の約束では逆数の意味となるが、これは逆関数を意味する記号で“インバース”と読む。右図を見て分かるように、逆関数は y の 1 つの値に対して θ が 1 つに決まらない。このような関係は純粋に関数と呼ばないので、右図の太線部分（$-\pi \leqq \theta \leqq \pi$）だけを抽出して考えることがある。これを**主値**という。主値を決めれば、逆関数は正しく関数となる。すると、先の不等式 $2\sin\theta + 1 > 0$ にいくつかあった解のうち、関数の視点からもっともふさわしい解は $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{7}{6}\pi$ であったことになるのである。

　同様に、$y = \cos\theta$ と $y = \tan\theta$ でも主値を考えておくことはよいことである。わざわざ逆関数にしなくとも、正規の関数のグラフを眺めれば主値の置き所は分かる。$\cos\theta$ は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を主値にすればよい。$\tan\theta$ は $\sin\theta$ と同じく $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ が主値である。