三角関数の合成

たとえば直線 $y=-2x+1$ と放物線 $y=x^2$ を合わせた関数、$y=x^2-2x+1$ は何になるであろうか。もちろん $y=(x-1)^2$ の放物線であり、$y=x^2$ を x 軸方向に 1 だけ移動したグラフとなる。直線や放物線に限らず、多項式で表される関数は簡単に合わせることができ、再び多項式で表された関数となる。

三角関数においても、$y=\sin\theta$ と $y=\cos\theta$ を合わせることはできるだろう。そのことはグラフを描いて $\sin\theta+\cos\theta$ の値の目安をつければ、何となく $y=\sin\theta+\cos\theta$ らしきグラフを見ることができるかもしれない。では、そのグラフの式がどうなっているかと問われれば、すぐには分からないものである。

ただ三角関数は特殊な場合に、**合成**した関数の式を特定できる。特殊な場合とは、加法定理が利用できるときである。実際、$y=\sin\theta+\cos\theta$ は

$$\begin{aligned}
\sin\theta+\cos\theta &= \sin\theta\cdot 1+\cos\theta\cdot 1 && \text{（1 が掛けてあるとみなした）}\\
&= \sqrt{2}\left\{\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} && \text{（}\sqrt{2}\text{をくくり出した）}\\
&= \sqrt{2}\left\{\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right\} && \text{（}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{、}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{より）}\\
&= \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) && \text{（加法定理より）}
\end{aligned}$$

となるから、y 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍、θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ移動した sin のグラフということになる。

なぜ $\sin\theta+\cos\theta$ が 1 つの sin にまとめることができたかと言えば、$\sqrt{2}$ をくくりだしたことで、sin と cos の係数がちょうど同じ角—ここでは $\dfrac{\pi}{4}$ —に対する cos と sin の値になったからである。そのことで、係数を含めた和の式が正弦の加法定理に一致したので、結果的に 1 つの sin にまとまったのである。

同じ考えで、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$ も 1 つの sin にまとめられる。なぜなら、sin、cos の係数がそれぞれ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\dfrac{1}{2}$ であり、これはちょうど $\dfrac{\pi}{6}$ に対する cos と sin の値に一致している。すなわち

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

となるのである。

このように考えると、sin と cos の係数がちょうどよい組み合わせでなければ、三角関数は合成できないように思えるかもしれない。しかし、そうではないのである。係数を a、b として、$a\sin\theta+b\cos\theta$ を考えてみよう。このとき同じ角 α を用いて、$a=\cos\alpha$、$b=\sin\alpha$ となっていれば、それはちょ

うど正弦の加法定理に一致し

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha = \sin(\theta+\alpha)$$

とすることができる。

しかし $a=\cos\alpha$、$b=\sin\alpha$ となっていることは、それはそれで少し特殊な状況だと感じるなら、見落としていることがあると言わざるを得ない。なぜなら、たとえ $a=\cos\alpha$、$b=\sin\alpha$ でなくとも

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

としてしまえば、必ず $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\tilde{\alpha}$、$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\tilde{\alpha}$ を満たす $\tilde{\alpha}$ が見つかるからである。その理由は、$\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ であるから、それがまさに $\cos\tilde{\alpha}$、$\sin\tilde{\alpha}$ なのである。

結局、$a\sin\theta+b\cos\theta$ は必ず 1 つの sin に合成することができ、それは

$$\boxed{\begin{array}{l} a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\tilde{\alpha}) \\ \text{ただし } \tilde{\alpha} \text{ は、} \cos\tilde{\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{、}\sin\tilde{\alpha} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ を満たす} \end{array}}$$

ということなのである。

* * *

合成の例として示した 2 番目の式において、係数の符号を少し変えて

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$$

としたらどうだろうか。この場合は、加法定理には差の形のものがあったので、差の形の加法定理に $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$ を当てはめて

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

とすればよい。しかし加法定理は、差の形を使う必要はまったくないのである。

いまの例を和の形に当てはめるなら、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\tilde{\alpha}$、$-\dfrac{1}{2}=\sin\tilde{\alpha}$ を満たす $\tilde{\alpha}$ を探せばよい。その $\tilde{\alpha}$ は $\dfrac{11}{6}\pi$ でも $-\dfrac{\pi}{6}$ でもよいのだが、絶対値が小さい方を用いて

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \sin\theta\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos\theta\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

とするのがよいだろう。▮

和 $\to$ 積の公式

三角関数の合成とは sin と cos の合成のことであった。では、sin と sin は合成して 1 つの sin にできないのであろうか。$\sin\theta + 2\sin\theta = 3\sin\theta$ というのでは当たり前すぎるので、たとえば $2\sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ を考えてみよう。これは

$$\begin{aligned}
2\sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\sin\theta + \sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3} && \text{（2 項めを加法定理で展開した）} \\
&= 2\sin\theta + \sin\theta\cdot\frac{1}{2} + \cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{5}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta && \text{（整理した）} \\
&= \sqrt{7}\sin(\theta + \tilde{\alpha}) && \text{（三角関数の合成）}
\end{aligned}$$

のようにすれば合成できる。ただし $\tilde{\alpha}$ は、$\cos\tilde{\alpha} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$、$\sin\tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ を満たす角である。このことは一般に、$a\sin(\theta+\alpha) + b\sin(\theta+\beta)$ という形ならば合成はできることを意味している。実際、

$$\begin{aligned}
a\sin(\theta+\alpha) + b\sin(\theta+\beta) &= a(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) + b(\sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta) \\
&= (a\cos\alpha + b\cos\beta)\sin\theta + (a\sin\alpha + b\sin\beta)\cos\theta \\
&\quad [a\cos\alpha + b\cos\beta = \tilde{a},\ a\sin\alpha + b\sin\beta = \tilde{b} \text{ とおいて}\ldots] \\
&= \tilde{a}\sin\theta + \tilde{b}\cos\theta
\end{aligned}$$

であるから、そのまま合成の公式に当てはめることができるのである。

しかし、$\sin\theta + \sin 2\theta$ を 1 つの sin に合成できるかとなると、単純な話で済ますことはできない。そこで、ここでは合成ではなく、別の形の変形を考えてみたい。そのために、正弦の加法定理を振り返ることにする。まず、

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

である。そして、これらの式を辺々足したり、引いたりすれば、それぞれ

$$\begin{aligned}
\text{和）}\quad \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta \\
\text{差）}\quad \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

になることはすぐに分かる。ここで、$\alpha+\beta = A$、$\alpha-\beta = B$ とおくと、$\alpha = \frac{A+B}{2}$、$\beta = \frac{A-B}{2}$ と解ける。これらをすべて等式に代入すると

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A+\sin B&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \sin A-\sin B&=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{aligned}}$$

という関係式が得られる。**sin の和積公式**と呼ばれよく利用される式である。よく利用されるからには価値があるのだが、この公式の価値は、和の式を積の式に変換できることにある。積の式とは多項式で言えば因数分解にあたると言えば、公式の重要性が伝わるだろうか。

同様に、余弦の加法定理

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

を、辺々足したり引いたりした上で、sin の和積公式と同じく $\alpha,\ \beta$ を $A,\ B$ に変えれば

$$\boxed{\begin{aligned}\cos A+\cos B&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \cos A-\cos B&=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{aligned}}$$

となって、**cos の和積公式**となる。sin, cos を合わせて、4 つまとめて覚えれば大変便利に使えてよいので、語呂合わせで暗記する場合が多い。語呂合わせには多少の亜種があるようなので、覚える気になったら調べてみるとよいだろう。

* * *

このような公式は使い方によって威力を発揮する。少し前に $y=\sin 2\theta$ と $y=\sin\dfrac{1}{2}\theta$ を同じ θ-y 座標に描いたところに戻って、グラフを見てほしい。2 つのグラフはともに $\theta=0,\ 2\pi$ で交差している他に、$\dfrac{\pi}{2}$ の手前で 1ヶ所、π と $\dfrac{3}{2}\pi$ の間で 2ヶ所交差している。そのうち、$\dfrac{3}{2}\pi$ の手前は $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$ であろうことはグラフを見れば分かるが、他は計算しない限り求められないだろう。そこで和積の公式が役に立つ。

$y=\sin 2\theta$ と $y=\sin\dfrac{1}{2}\theta$ の交点は

$$\sin 2\theta=\sin\frac{1}{2}\theta\quad \text{すなわち}\quad \sin 2\theta-\sin\frac{1}{2}\theta=0$$

を解けばよいので、和積の公式より

$$\sin 2\theta-\sin\frac{1}{2}\theta=2\cos\frac{5}{4}\theta\sin\frac{3}{4}\pi=0$$

が分かる。いまは $0<\theta<2\pi$ の範囲の解を探しているので、$\cos\dfrac{5}{4}\theta=0$ または $\sin\dfrac{3}{4}\theta=0$ を満たす θ は

$$\frac{5}{4}\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\quad \text{または}\quad \frac{3}{4}\theta=\pi$$

となって

$$\theta=\frac{2}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

が分かるのである。この値はグラフと見比べて正しいことが分かるのだが、実はちょっと手抜きをして解いたことに気づいただろうか。本当は $0<\theta<2\pi$ の範囲の解を求めるとき、$\dfrac{5}{4}\theta$ と $\dfrac{3}{4}\theta$ はそれぞれ

$$0<\frac{5}{4}\theta<\frac{5}{4}\cdot 2\pi、\quad 0<\frac{3}{4}\theta<\frac{3}{4}\cdot 2\pi$$

の範囲で探さなくてはならない。正しく解が求められたのは、微妙な位置の解がなかったからである。▮

積 $\rightarrow$ 和の公式

和積公式は因数分解のようなものだと言ったが、それを逆に使えば因数分解の逆の式となる。多項式で言えば展開にあたるだろうか。ただ、そのまま逆に覚えたのでは使い勝手がよくない。そこで、改めて $\dfrac{A+B}{2}=\tilde{A}$、$\dfrac{A-B}{2}=\tilde{B}$ とおくと、$A=\tilde{A}+\tilde{B}$、$B=\tilde{A}-\tilde{B}$ と解ける。

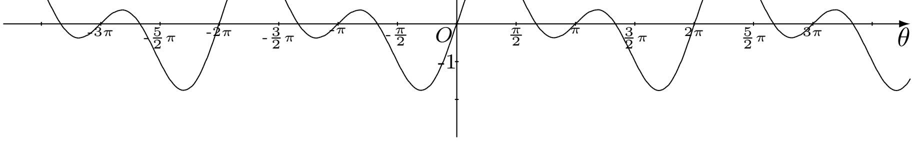
これらを和積公式に代入し、左辺と右辺を入れ替えて書けば

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin\tilde{A}\cos\tilde{B}&=\frac{1}{2}\{\sin(\tilde{A}+\tilde{B})+\sin(\tilde{A}-\tilde{B})\}\\
\cos\tilde{A}\sin\tilde{B}&=\frac{1}{2}\{\sin(\tilde{A}+\tilde{B})-\sin(\tilde{A}-\tilde{B})\}\\
\cos\tilde{A}\cos\tilde{B}&=\frac{1}{2}\{\cos(\tilde{A}+\tilde{B})+\cos(\tilde{A}-\tilde{B})\}\\
\sin\tilde{A}\sin\tilde{B}&=-\frac{1}{2}\{\cos(\tilde{A}+\tilde{B})-\cos(\tilde{A}-\tilde{B})\}
\end{aligned}}$$

となって、**sin、cos の積和公式**が得られるのである。公式は 4 個まとめて提示したが、実際は 1 番目と 2 番目は同じ式である。そのことは $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ を入れ換えれば分かる。しかし、もし和積公式を何らかの語呂合わせで覚えていたのなら、積和公式も 4 個まとめて覚えることは苦ではないだろう。

先々への指標

先に、$\sin\theta+\sin 2\theta$ の合成を単純な話で済ますことができないと述べたが、そのことをグラフを描いて示すことにしよう。



θ が $\dfrac{\pi}{12}$ の倍数の場合は $\sin\theta$ を計算できたので、それらをもとに点を打ってもよいだろう。しかしこの場合、それでは十分な情報が得られない。グラフは明らかに周期 2π の関数であることが見てとれる。単純に $\sin\theta$ と $\sin 2\theta$ を合わせただけなのに、グラフは複雑さを増してしまった。このような例を見ると、$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta$ はどうなるのか想像もつかないのではないだろうか。

三角関数は、いずれ**フーリエ級数**へとつながる[1]。このような複雑な三角関数を扱う前に、簡単な三角関数について習熟しておくことは、フーリエ級数へ至るための地図を手にすることなのである。

*　*　*

結果だけを示した $y = \sin\theta + \sin 2\theta$ のグラフを見て、なるほどと納得するようではいけない。どうあがいても結果を信用する以外に方法がなければ仕方ないが、その程度のことは Microsoft Excel で確認できる。簡単に鵜呑みにせず、さらに発展的なことまで調べるようにしたいものである。

◇	A	B	C	D	E	F
1	θ	sin θ+sin2 θ				
2	0	(※ **B2**)				
3	0.314	↓下へコピーする				
4	↓ **A2-3** を選択し	↓				
5	↓下へドラッグする	↓				
6	↓	↓				

※ セルの式
(B2)　**=sin(A2)+sin(2*A2)**

この場合も以前と同じく、A 列の θ の値は近似値で十分だろう。区間幅は $\dfrac{\pi}{10}$ のつもりなので、A 列 2–3 行をドラッグコピーする。B 列に $\sin\theta + \sin 2\theta$ の式を入力したら、適当なセル範囲を選択して、メニューからグラフ（散布図）を選択すると目的のグラフが表示される。何も特別な式を入力するわけではないので、三角関数を使った式をいろいろ試すとよいだろう。▮

[1] ジャン・バティスト・ジョゼフ・フーリエ (1768–1830)：フランスの数学者・物理学者。フーリエ変換を考案した。