正接の加法定理

正弦と余弦の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

の行間に線を引いてみよう。線を引くというのは比喩であって、実際は辺々の比をとって分数にするということである。すると

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

となる。$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であることに注意しながら、右辺の分子・分母を $\cos\alpha\cos\beta$ で割れば

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

となって、これより**正接の加法定理**

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}}$$

を得ることができる。2 番目の式は、β を $-\beta$ に書き換えて直ちに得た式である。

2 倍角の公式

これまでに得た加法定理において、β を α に置き換えると 2α に対する加法定理の式になる。それは

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\alpha)&=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha\\ \cos(\alpha+\alpha)&=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\\ \tan(\alpha+\alpha)&=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}\end{aligned}$$

であるから、これより **2 倍角の公式**

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ &\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}}$$

を作ることができる。2 倍角の公式を用いても、新たな角に対する三角比の値を求めることはできないが、三角関数で様々な計算をするときに重宝する式である。また、$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ を利用すると、$\cos 2\alpha$ は

$$\boxed{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \qquad (※)}$$

とすることもできる。いずれも sin または cos だけの式で表せていることに注意したい。

3 倍角の公式

2 倍角の公式と加法定理を組み合わせると 3 倍角の式を導くことができる。具体的には

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha)\\ &= \sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

とすることで、$\sin 3\alpha$ を $\sin\alpha$ だけの式にすることができる。

$\cos 3\alpha$ も同じく $\cos\alpha$ だけの式にすることができるが、これは結果だけ示すことにしよう。

$$\boxed{\begin{aligned}\sin 3\alpha&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\\ \cos 3\alpha&=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\end{aligned}}$$

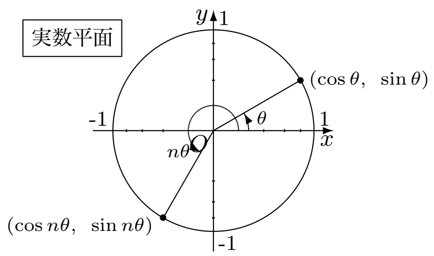
$\tan 3\alpha$ を $\tan\alpha$ だけの式にするには、上の 3 倍角の公式を分数にした上で

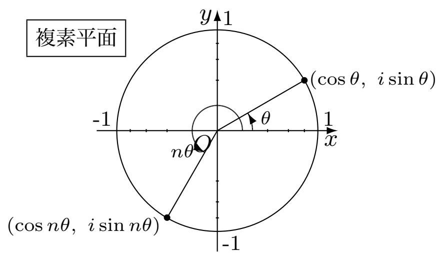
$$\begin{aligned}\tan 3\alpha &= \frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha} && \left(\tan 3\alpha=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}\text{より}\right)\\ &= \frac{3\tan\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-4\tan^3\alpha}{4-3\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} && (\text{分子・分母を}\cos^3\alpha\text{で割った})\\ &= \frac{3\tan\alpha(1+\tan^2\alpha)-4\tan^3\alpha}{4-3(1+\tan^2\alpha)} && \left(\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha\text{より}\right)\\ &= \frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

のようにすればよい。$\tan 3\alpha$ は、あまり公式の形で目にしないのではあるが。

* * *

2 倍角、3 倍角と進めば、一般に n 倍角の公式がどういうものか気になるかもしれない。それには別の方面からの考察を必要とし、単に三角関数に止まらない内容になってしまうので、深入りしない程度に述べておこう。別の方面とは**複素数**のことである。





実数平面と複素平面に、ともに半径 1 の円を描いて円周上の点を座標で表せば、いずれも sin、cos を用いて表すことができる。違いは、複素平面の y 軸が虚数軸であるため、y 座標には虚数単位 i が付くことである。これだけの違いであるが、実数平面の点は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と示す以外に方法がないのに対し、複素平面の点は $\cos\theta + i\sin\theta$ と示すことができることが重要である。このことから、**ド・モアブルの定理**

$$\boxed{\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

が成り立つ、とだけ述べておこう[1]。

ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

と計算でき、実数部分と虚数部分を比較して

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta、\quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

が得られる。これが 3 倍角の公式である。先に示した公式と違うようだが、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて代入すれば、いずれも cos または sin だけの式にすることができる。実際に確認するとよいだろう。

n 倍角の式は n 乗の展開式から作ることができるので、丁寧に展開すればそれが公式である。▮

半角の公式

（※）は、2α を用いた式を α を用いた式に直すことができるものである。α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に置き換えてみると、$\cos 2\alpha = \cdots$ は $\cos\alpha = \cdots$ となって、結局 $\cos\alpha$ が新たな 2 種類の式

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}、\quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

で表せた。ここで $\dfrac{\alpha}{2}$ が主になるように移項して整理すれば

[1]アブラハム・ド・モアブル (1667–1754)：フランスの数学者。

$$\boxed{\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2}\\ \cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{2}\end{aligned}}$$

という式に書き換えられる。これは**半角の公式**と呼ばれる。正接の場合は、これを分数にして

$$\boxed{\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

である。

正確な三角比の値を知ることができる角は、これまでに $\dfrac{\pi}{12}$ とその倍数にまで拡張されていた。いま、半角の公式を得たことで、正確な三角比を知ることができる角は $\dfrac{\pi}{24}$ とその倍数まで拡張されるのである。

たとえば、$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であったから、$\sin\dfrac{\pi}{24}$ が正の値であることを考慮して

$$\sin\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$$

と求められる。あまりきれいな式ではないが、正確な値であることは間違いない。

実際はこの調子で $\sin\dfrac{\pi}{48}$、$\sin\dfrac{\pi}{96}$、$\ldots$ と、いくらでも小さな角に対する三角比の値を計算できる。しかし、その値は何重にも $\sqrt{\ }$ がついて、決して分かりやすい式とは言えないのである。