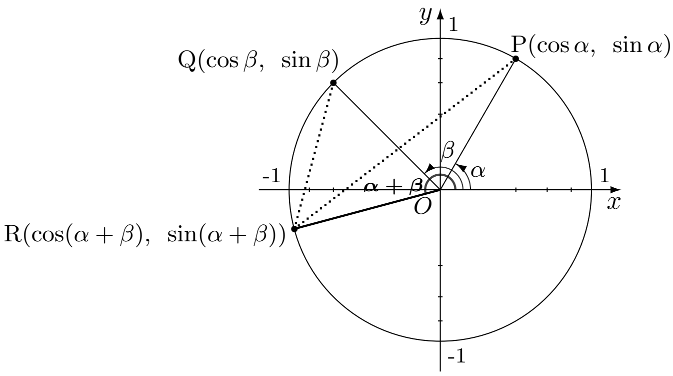
$\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha+\sin\beta$

文字式の展開において $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ は周知のことである。しかし $\sin(\alpha+\beta)$ は $\sin\alpha+\sin\beta$ ではない。なぜなら、$\sin(\alpha+\beta)$ は $\sin\times(\alpha+\beta)$ ではなく、$(\alpha+\beta)$ の正弦比を求める意味だからである。



$\sin(\alpha+\beta)\neq\sin\alpha+\sin\beta$ であることは図を見ても明らかである。図では $\sin\alpha$、$\sin\beta$ は共に正の値なのに、$\sin(\alpha+\beta)$ は負の値になっている。では、$\sin(\alpha+\beta)$ の値はどうなっているのだろう。

正弦の加法定理

だいぶ面倒な計算をすることになるが、$\sin(\alpha+\beta)$ の正しい式を求めることにしよう。まず、△PRO に余弦定理を適用して

$$PR^2=OP^2+OR^2-2\cdot OP\cdot OR\cdot\cos\angle POR$$

が成り立っている。単位円の半径から $OP=OR=1$ であることと $\angle POR=\beta$ であることに注意して、等式を座標を用いて表すと

$$\{\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\}^2+\{\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)\}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos\beta$$

である。左辺を展開すると $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ と $\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)$ が現れるが、いずれも 1 であることから等式は思いのほか簡単な式

$$\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)=\cos\beta \quad \ldots(A)$$

となる。展開した後、両辺を -2 で割った結果であることに注意されたい。

同じことを △QRO について行うと、余弦定理

$$QR^2 = OQ^2 + OR^2 - 2 \cdot OQ \cdot OR \cdot \cos\angle QOR$$

から、$\angle POR = \alpha$ であることに注意して、座標の計算をすると

$$\begin{aligned} \{\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\}^2 + \{\sin\beta - \sin(\alpha+\beta)\}^2 &= 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cos\alpha \quad \text{より} \\ \cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta) + \sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha \quad \ldots(B) \end{aligned}$$

を得る。

ここで、$(A)\times\cos\beta - (B)\times\cos\alpha$ を計算すれば、$\cos(\alpha+\beta)$ が消去されて

$$(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\sin(\alpha+\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha \quad (※)$$

のように、$\sin(\alpha+\beta)$ が浮き出る等式になる。両辺を $(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$ で割りたいのだが、これが 0 でない保証はないので、少し違った方向から計算処理をしてみたい。

そのために両辺に $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$ を掛けることにする。すると左辺の $\sin(\alpha+\beta)$ の係数は

$$\begin{aligned} &(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= (1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= \cos^2\beta - \cos^2\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ &= \cos^2\beta - \cos^2\alpha \end{aligned}$$

となるので、(※) は

$$(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)\sin(\alpha+\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)$$

に等しい。この等式は α、β に関する恒等式であるから、

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

が成り立っている。

だいぶ手間をかけたが、結局

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

が正しい関係式なのである。これは**正弦の加法定理**と呼ばれる。

* * *

（※）の両辺を $(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$ で割っても、結局は似たような手続きを踏んで同じ結果を得ることができるので、とりあえずの結論を手に入れたいだけなら、それでよいのかもしれない。しかし、その場合は $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=0$（☆）のときを別に検証しなくてはならない。（☆）は $\sin\alpha\cos\beta=\cos\alpha\sin\beta$ だから両辺を $\cos\alpha\cos\beta$ で割って、その結果 $\tan\alpha=\tan\beta$ になることに注意すると、

$$\alpha=\beta \quad \text{または} \quad \alpha=\beta+\pi$$

のときに限り（☆）が満たされることになる。つまり、この状況で正弦の加法定理が成り立つことを追加で示せばよいのだが、それは簡単に示せるとは限らないのである。▮

余弦の加法定理

先に得た (A)、(B) を $\cos(\alpha+\beta)$ について解けば**余弦の加法定理**を導くことができる。しかし、ここでは別の方法で求めてみよう。まず、正弦の加法定理において

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\tilde{\alpha}、\quad \beta=-\tilde{\beta}$$

に置き換えると、等式は

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\tilde{\alpha}\right)\cos(-\tilde{\beta})+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\tilde{\alpha}\right)\sin(-\tilde{\beta})$$

である。ここに、三角比の細かな関係

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta、\quad \cos(-\theta)=\cos\theta、\quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

を適用すると

$$\cos(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})=\cos\tilde{\alpha}\cos\tilde{\beta}-\sin\tilde{\alpha}\sin\tilde{\beta}$$

が得られる。$\tilde{\alpha}$、$\tilde{\beta}$ を改めて α、β で書き直して

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

が余弦の加法定理である。

この手法を真似て、β を $-\beta$ に置き換えれば、直ちに角 $\alpha-\beta$ に対する正弦と余弦の加法定理

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

も得ることができる。

加法定理の利用

三角比の値を正確に知ることができる角は限られていた。それは、基本的に $\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{\pi}{4}$、$\dfrac{\pi}{3}$ とその倍数である。加法定理は 2 種類の角の和、または差に対する正弦と余弦の値を求めることができる。この 3 種類の角の和と差から新たに作ることができる角は

$$\frac{5}{12}\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}、\quad \frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}、\quad \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \text{ または } \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

であるが、$\dfrac{\pi}{12}$ を基準にすれば他はすべてその倍数で扱える。そこで、$\dfrac{\pi}{12}$ に対する正弦と余弦の値を求めておこう。

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ .
\end{aligned}$$

以前、$30°$-$60°$-$90°$ の直角三角形に $45°$-$45°$-$90°$ の直角三角形を重ねて、図形の性質を考えながら $\sin 15°$ と $\cos 15°$ の値を求めたことを覚えているだろうか。当時の求め方と比べると、三角関数を使って計算する方がはるかに手間いらずであることが分かるだろう。