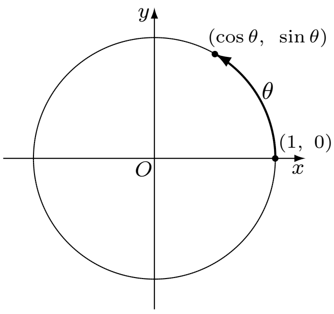
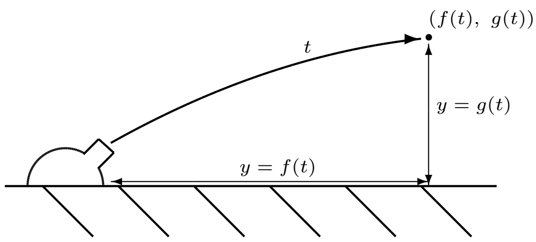
三角関数から円角?関数へ

さて、三角関数のグラフを一通り描いてみたものの、θ が単位円周上を目に見える形で動いているのに、y は単位円周上ではっきり見ることができないのは少々もどかしい気がする。それは私たちが慣れ親しんだグラフというものが、あまりにも縦軸・横軸に依存しているためであろう。そのため、本来なら円周に沿って動く変数 θ を、まっすぐな θ 軸に沿って動かさなくてはならない状況にしているのである。





しかしこの様子は、たとえば大砲から発射された砲弾の位置—大砲からの水平距離と高さ—を関数で表す場合と同じなのである。水平距離と高さは時刻 t における関数になっている。この場合は、y が目に見える形であるのに対し、t ははっきりした形になっていない。しかし時刻は直線的なものと認識しやすいので、三角関数で感じる違和感は遠のいているのだろう。

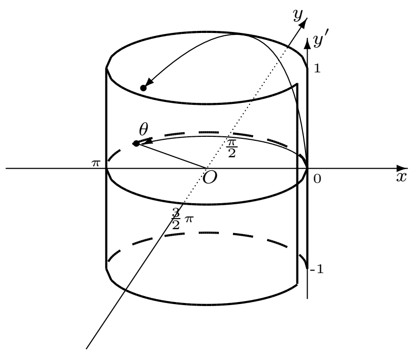
このように受ける印象は違うのだが、三角関数も砲弾の位置も本質は同じである。それは、定義域の 1 つの値に対して、値域の 2 つの値が同時に対応することである。三角関数はそれらを個別に“分離して” 考えているから、砲弾の水平距離と高さを “区別して” 考えるときより、想像力が働かないのであろう。

とくに三角関数は値域を分離して考えているので、もはやそこには直角三角形の姿を見ることはできず、単に弧の長さと座標の関係だけが見えるに過ぎない。たしかに θ の 1 つの値を決めることで y の 1 つの値が定まることから、この関係は関数であると言うことができるのだが、それを三角関数と呼んでよいかは疑問である。むしろ、円周上の弧度（角度）を定義域とする関数ということで、“円角関数” と呼ぶのがふさわしいのかもしれない。ただし、三角関数の名称が定着いている今となっては、あえて呼称を変えようとは思わないので、今後も三角関数の呼び名を使うことにする。

* * *

円周に沿って動く θ と y 軸を上下する $\sin\theta$ を、θ-y 座標に写して見るのは、必ずしも直観に合っていることではない。それなら、私たちが慣れ親しんでいる座標を円周に沿って巻き付けたらどうだろうか。この場

合、y の値を写す面は y' 面になっていることに注意されたい。



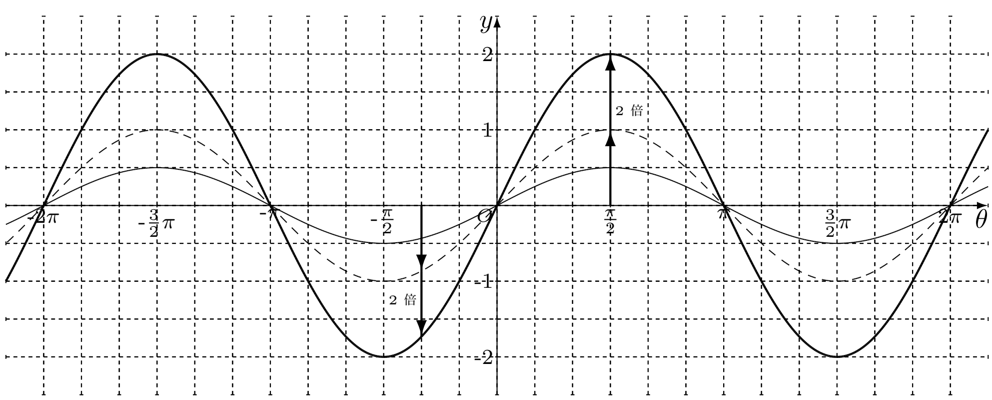
こうすると、円周上を動く θ は自然な動きになって、そのときの $y = \sin\theta$ の値は側面にやはり自然な位置で描かれるであろう。側面の軌跡が $y = \sin\theta$ であることは、側面を展開すれば分かるのである。▮

$y = a\sin(b\theta - c) + d$ について

2 次関数 $y = x^2$ を基本として、$y = a(x-p)^2 + q$ に拡張できたように、$y = \sin\theta$ を基本として、$y = a\sin(b\theta - c) + d$ に拡張できる。ここでは主に sin のグラフについて調べることにしよう。なぜなら、cos や tan なども同じことでだからである。

$y = 2\sin\theta$、$y = \dfrac{1}{2}\sin\theta$

$y = 2\sin\theta$ のグラフは、たとえば $y = 2x^2$ のグラフと対比させながら考えるとよいかもしれない。基本の式に係数が掛けられているときは、y の値は基本の値に係数を掛けたものになる。したがってグラフは、y が正の値なら正の方向に、負の値なら負の方向に伸びたように見えるはずである。



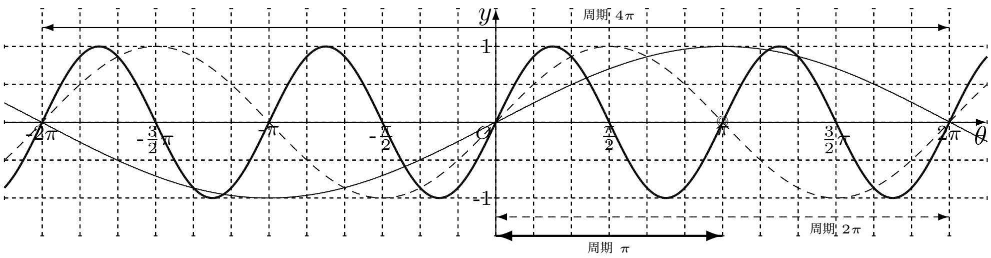
太線のグラフが $y = 2\sin\theta$ であり、細線のグラフが $y = \dfrac{1}{2}\sin\theta$ のグラフである。点線で示した $y = \sin\theta$ のグラフと比較すれば、どの θ の位置でも上下に一定の値だけ引き伸ばされているように見えるであろう。一般に

$$\boxed{y = a\sin\theta \text{ のグラフは、} y = \sin\theta \text{ を } y \text{ 軸方向に } a \text{ 倍したグラフである}}$$

といえる。

$y = \sin 2\theta$、$y = \sin\dfrac{1}{2}\theta$

$y = \sin 2\theta$ の場合は $y = x^2$ と対比させられないので、θ 軸に沿って平行移動したときを参考に考えることにする。この場合は原点の移動先ではなく、次の周期が始まる $(2\pi,\ 0)$ の移動先を調べるとよい。$\sin 0$ の次に周期が始まるのは $\sin 2\pi$ のときなので、$\sin 2\theta$ が $\sin 2\pi$ になるとき、すなわち $\theta = \pi$ のときが次の周期の始まりである。



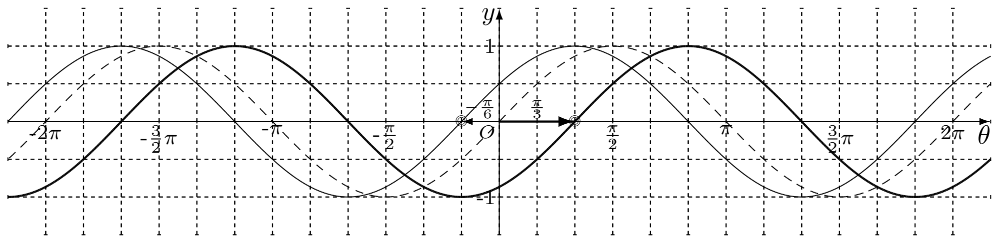
したがって、$y = \sin 2\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ を θ 軸方向に押し縮めたように見えるはずである。逆に、$y = \sin\dfrac{1}{2}\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ を θ 軸方向に引き伸したように見えるはずである。一般に

$$\boxed{y = \sin(b\theta) \text{ のグラフは、} y = \sin\theta \text{ の周期を } \frac{1}{b} \text{ 倍したグラフである}}$$

といえる。

$y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$、$y = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$y = (x-3)^2$ のグラフが $y = x^2$ を x 軸方向に 3 だけ平行移動されるように、$y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y = \sin\theta$ を θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものになる。符号と移動の方向が逆のように思えるかもしれないが、原点—すなわち $y = 0$ になる点—がどこに移るかということなので、$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ が移動先の場所になるのである。



同様に、$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは $y=\sin\theta$ を θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。一般に

> $y=\sin(\theta-c)$ のグラフは、$y=\sin\theta$ を x 軸方向に c だけ平行移動したグラフである

といえる。

$y=\dfrac{1}{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$

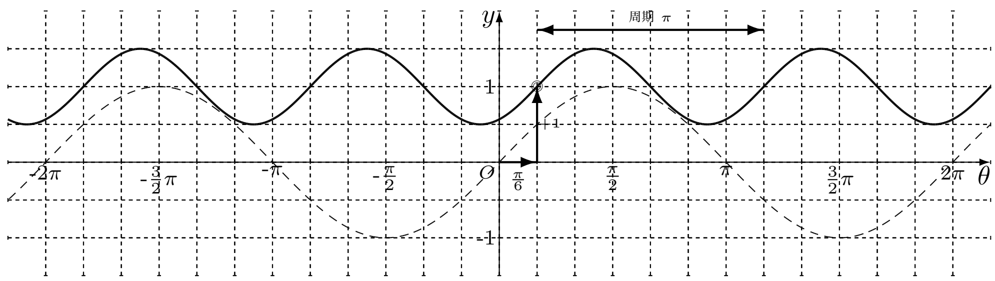
さて、$y=a(x-p)^2+q$ との関連から、一般に

> $y=\sin\theta+d$ のグラフは、$y=\sin\theta$ を y 軸方向に d だけ平行移動したグラフである

ことは容易に分かるであろう。そこで、以上の基本的なグラフの移動が同時に記述された場合を考えてみよう。たとえば

$$y=\frac{1}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+1$$

は、y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍し、周期が $\dfrac{1}{2}$ 倍—すなわち周期が π —であるグラフを、θ 軸方向へ $\dfrac{\pi}{3}$、y 軸方向へ $+1$ だけ平行移動したグラフであると思われる。しかし、実際は違うのである。それは θ 軸への平行移動であるが、原点の移動先は $y=0$ になる点でなくてはならなかった。$y=0$ であるためには $2\theta-\dfrac{\pi}{3}=0$ でなくてはならない。それは、$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ である。よって、θ 軸方向へ $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動するのが正しいのである。



この $\dfrac{\pi}{6}$ の平行移動が目に見えるようにするには

$$y=\frac{1}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+1=\frac{1}{2}\sin 2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1$$

のように式を変形しておくとよい。そうすることでグラフは、y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍し、周期が $\dfrac{1}{2}$ 倍—すなわち周期が π —であるグラフを、θ 軸方向へ $\dfrac{\pi}{6}$、y 軸方向へ $+1$ だけ平行移動したものであることがはっきりと分かるのである。